x^{2002} を x^4-1 で割った余りを求めよ。

＜ '02 立教大 ＞

【戦略】

$f(x)=x^{2002}$ を x^4-1 で割った商を $Q(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d とおくと

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^4-1)Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d \\ &=(x+1)(x-1)(x^2+1)Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d \end{aligned}$$

という関係式が成り立ちます。

このあとは，例題のように

$$f(1),\ f(-1),\ f(i),\ f(-i)$$

の値を経由して捌いていけばよいでしょう。

【解答】

$f(x)=x^{2002}$ とおく。

求める余りは高々 3 次であるため，実数 a，b，c，d を用いて

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

とおける。

$f(x)$ を x^4-1，すなわち $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ で割った商を $Q(x)$ とすると

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+1)Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots ①$$

① に $x=1$，-1，i，$-i$ を代入すると

$$\begin{aligned} &f(1)=a+b+c+d \\ &f(-1)=-a+b-c+d \\ &f(i)=-ai-b+ci+d=(-b+d)+(c-a)i \\ &f(-i)=ai-b-ci+d=(-b+d)+(a-c)i \end{aligned}$$

一方，

$$f(1)=1^{2002}=1,\ f(-1)=(-1)^{2002}=1$$

$$f(i)=i^{2002}=(i^4)^{500}\cdot i^2=-1,\ \ f(-i)=(-i)^{2002}=i^{2002}=-1$$

ゆえに，$\begin{cases} a+b+c+d=1 & \cdots ① \\ -a+b-c+d=1 & \cdots ② \\ (-b+d)+(c-a)i=-1 & \cdots ③ \\ (-b+d)+(a-c)i=-1 & \cdots ④ \end{cases}$

③，④ より，$\begin{cases} -b+d=-1 & \cdots ⑤ \\ c-a=0 & \cdots ⑥ \end{cases}$

⑤ より，

$$d=b-1 \quad \cdots ⑦$$

⑥ より，

$$c=a \quad \cdots ⑧$$

であり，①，② にこれらを代入すると

$$\begin{cases} 2a+2b-1=1 \\ -2a+2b-1=1 \end{cases}$$

これより，$a=0$，$b=1$ を得て，⑦，⑧ より，$c=0$，$d=0$

求める余りは x^2 …圏

【総括】

1 の 4 乗根の代入による比較によって捌いていきました。