整式 $x^{2019}+x^{2020}$ を整式 x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

＜ '20 広島工業大 ＞

【戦略】

$f(x)=x^{2019}+x^{2020}$ を x^2+x+1 で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

という関係式が成り立ちます。

この関係式に代入する値としては $x^2+x+1=0$ の解

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

でしょう。

これは 1 の 3 乗根であり，どちらか一つを ω とおくと，もう一方は ω^2 となります。

また，この ω は $\omega^3=1$ を満たします。

$f(\omega)=a\omega+b$ であり，$\omega^{2019}+\omega^{2020}=a\omega+b$ を得るわけですが，$\omega^3=1$ であることから

$$\omega+1=a\omega+b$$

という関係式を得ます。

一般に a，b，c，d が実数，α が虚数であるとき

$$a+b\alpha=c+d\alpha \Longrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

ということが言えます。

（証明）$(b-d)\alpha=c-a$ であり，$b\fallingdotseq d$ と仮定すると

$$\alpha=\frac{c-a}{b-d}$$

で左辺が虚数，右辺が実数となり矛盾する。

これより，$b=d$ となり，このとき $a=c$ も成り立つ。

これより，$a=1$，$b=1$ と言えて解決です。

【解答】

$f(x)=x^{2019}+x^{2020}$ とおく。

求める余りは高々 1 次であるため，$ax+b$（a，b は実数）とおける。

$f(x)$ を x^2+x+1 で割った商を $Q(x)$ とすると

$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b \ \cdots ①$$

$x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると，$\omega^2+\omega+1=0$ であり，両辺に $\omega-1$ をかけると

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

これより $\omega^3=1 \cdots ②$ を得る。

① に $x=\omega$ を代入すると，$f(\omega)=a\omega+b$

すなわち $\omega^{2019}+\omega^{2020}=a\omega+b$ であり，② より

$$\omega+1=a\omega+b$$

a，b は実数，ω は虚数なので，$a=1$，$b=1$

求める余りは $x+1$ …答

【総括】

$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ としたとき

$$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$$

という関係式（除法の原理）を駆使しながら解く定番です。

$g(x)=0$ の解 $x=\alpha$ を代入することで，$f(\alpha)=R(\alpha)$ として解き進めていきますが，この α が

$$\alpha^{\square}=1\ (\text{あるいは } -1)$$

などという，1 の累乗根であれば，$f(\alpha)$ の高次計算を捌く際に簡潔に捌けます。