整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を考える。

(1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

(2) a，b を実数とし，$h(x)=x^2+ax+b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a，b の組をすべて求めよ。

＜ '23 東京大 ＞

【戦略】

(1) $g(x)=f(x)q_1(x)+r(x)$ **という除法の原理で式をたてると**

$g(x)^7=\{f(x)q_1(x)+r(x)\}^7$ **ということになります。**

ここから二項展開をしていきますが，結局は $f(x)$ で括れる部分と括り切れない $r(x)^7$ に分かれて

$g(x)^7=f(x)q_2(x)+r(x)^7$ **という形になり，$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは，$r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと等しいことが言えます。**

(2) **状況を一つずつ立式していきます。**

まずは，$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが $h_1(x)$ という条件から

$$h(x)^7=f(x)Q_1(x)+h_1(x) \quad \cdots ①$$

次に，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが $h_2(x)$ という条件から

$$h_1(x)^7=f(x)Q_2(x)+h_2(x)$$

$h_2(x)=h(x)$ **という条件から** $h_1(x)^7=f(x)Q_2(x)+h(x) \quad \cdots ②$

①，② から $h_1(x)$ を消去すれば

$$\{h(x)^7-f(x)Q_1(x)\}^7=f(x)Q_2(x)+h(x)$$

という式が成り立ちます。

(1) 同様，左辺を二項展開した際に，$f(x)$ で括れる部分と括れない部分に分けて考えれば，左辺は $h(x)^{49}+f(x)Q_3(x)$ という形となり

$$h(x)^{49}+f(x)Q_3(x)=f(x)Q_2(x)+h(x)$$

すなわち，$h(x)^{49}=f(x)Q_4(x)+h(x)$ ということになります。

これは，$h(x)^{49}-h(x)=f(x)Q_4(x)$ ということになり，

見方を変えれば，
$h(x)^{49}-h(x)$（$=H(x)$ **とおく**）**が $(x-1)^2(x-2)$ で割り切れる**
ということになります。

$H(1)=0$，$H(2)=0$ **なのですが，ここまでは $x-1$，$x-2$ という因子をもつことまでしか言えません。**

$x-1$ **という因子をもう一つもつことまで言うためには**

$$H'(1)=0$$

までいうことになります。

【解答】

(1) $g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $q_1(x)$ とすると，

$$g(x)=f(x)q_1(x)+r(x)$$

ゆえに，
$$\begin{aligned} g(x)^7&=\{f(x)q_1(x)+r(x)\}^7\\ &=\sum_{k=0}^{7}\left\{(f(x)q_1(x))^{7-k}r(x)^k\right\} \quad (\because \text{二項定理})\\ &=f(x)q_2(x)+r(x)^7 \quad (q_2(x)\text{は整式}) \end{aligned}$$

$r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $R(x)$ とするとき，

$$r(x)^7=f(x)q_3(x)+R(x) \quad (q_3(x)\text{は整式})$$

と表せる。

これより，
$$\begin{aligned} g(x)^7&=f(x)q_2(x)+f(x)q_3(x)+R(x)\\ &=f(x)q_4(x)+R(x) \quad (q_4(x)\text{は整式}) \end{aligned}$$

したがって，$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余り $R(x)$ に等しい。

(2) $h(x)^7$ を $f(x)$ で割った商を $Q_1(x)$ とすると，条件より

$$h(x)^7=f(x)Q_1(x)+h_1(x) \quad \cdots ①$$

$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った商を $Q_2(x)$ とすると，条件より

$$h_1(x)^7=f(x)Q_2(x)+h_2(x)$$

$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しいとき，$h_1(x)^7=f(x)Q_2(x)+h(x) \quad \cdots ②$

① より，$h_1(x)=h(x)^7-f(x)Q_1(x)$

② に代入して，$\{h(x)^7-f(x)Q_1(x)\}^7=f(x)Q_2(x)+h(x)$

二項定理より，左辺は $h(x)^{49}+f(x)Q_3(x)$ ($Q_3(x)$ は整式) と表せる。

ゆえに，$h(x)^{49}+f(x)Q_3(x)=f(x)Q_2(x)+h(x)$

すなわち，

$$h(x)^{49}=f(x)Q_4(x)+h(x) \quad (Q_4(x)\text{は整式})$$

となる。

これより，$h(x)^{49}=(x-1)^2(x-2)Q_4(x)+h(x)$ であるため，

$$h(x)^{49}-h(x)=(x-1)^2(x-2)Q_4(x)$$

つまり，$H(x)=h(x)^{49}-h(x)$ とおいたとき，$H(x)$ が $(x-1)^2(x-2)$ で割り切れるような a，b の値を求めればよい。

$H(x)=(x-1)^2(x-2)Q_4(x)$ と表せるとき

$$H(1)=0,\ H(2)=0$$

また，

$$H'(x)=2(x-1)(x-2)Q_4(x)+(x-1)^2Q_4(x)+(x-1)^2(x-2)Q_4'(x)$$

より，

$$H'(1)=0$$

これより，$\begin{cases} h(1)^{49}-h(1)=0 & \cdots ① \\ h(2)^{49}-h(2)=0 & \cdots ② \\ 49h(1)^{48}h'(1)-h'(1)=0 & \cdots ③ \end{cases}$

一般に $X^{49}-X=0$，すなわち $X(X^{48}-1)=0$ を満たす実数 X は

$$X=0,\ 1,\ -1$$

であり，今 $h(1)$，$h(2)$ は実数なので ①，② から

$$\begin{aligned}(h(1),\ h(2))=&(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)\\ &(1,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1) \cdots (☆)\end{aligned}$$

③ より，$h'(1)\{49h(1)^{48}-1\}=0$

(☆) より，$49h(1)^{48}-1 \fallingdotseq 0$ であるため，$h'(1)=0$

$h'(x)=2x+a$ であり，$h'(1)=a+2$ だから，$a+2=0$

すなわち $a=-2$

このとき，$\begin{cases} h(1)=a+b+1=b-1 \\ h(2)=2a+b+4=b \end{cases}$

ゆえに，$h(2)-h(1)=1$ で，(☆) の中でこれを満たすのは

$$(h(1),\ h(2))=(0,\ 1),\ (-1,\ 0)$$

したがって，$b=1,\ 0$

よって，$(a,\ b)=(-2,\ 1),\ (-2,\ 0)$ …【答】

【総括】

除法の原理

(割られる式)＝(割る式)・(商)＋(余り)

という関係式をきちんと立式していきましょう。

二項展開した際に，ざっくりと $f(x)$ で括れる部分，括れない部分に分けるなど

「見るべきところを見る」

という力が必要です。

一般に

$F(x)$ が $(x-\alpha)^2$ を因子にもつ $\iff$ $\begin{cases} F(\alpha)=0 \\ F'(\alpha)=0 \end{cases}$

です。

($\Longrightarrow$ の証明)

$F(x)$ が $(x-\alpha)^2$ を因子にもつとき，整式 $Q(x)$ を用いて

$$F(x)=(x-\alpha)^2\,Q(x)$$

と表せるため，$F(\alpha)=0$

また，$F'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)$ より，$F'(\alpha)=0$

ゆえに，$\begin{cases} F(\alpha)=0 \\ F'(\alpha)=0 \end{cases}$ が成り立つ

($\Longleftarrow$ の証明)

$F(\alpha)=0$ 及び因数定理から，整式 $Q_1(x)$ を用いて

$$F(x)=(x-\alpha)Q_1(x)$$

と表せる。

$F'(x)=Q_1(x)+(x-\alpha)Q_1'(x)$ であり，$F'(\alpha)=Q_1(\alpha)$

よって，$F'(\alpha)=0$ のとき，$Q_1(\alpha)=0$

因数定理から，整式 $Q_2(x)$ を用いて $Q_1(x)=(x-\alpha)Q_2(x)$ と表せる。

ゆえに，$F(x)=(x-\alpha)^2Q_2(x)$ と表せるため，$F(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因子にもつ。

本問では a，b という未知数 2 個に対して $H(1)=0$，$H(2)=0$ という時点で a，b は求まってしまいます。

ただ，これだと，$H(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ という形であるところまでしか言えません。

本問では，$H(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)$ という形であることまで言わなければなりません。

上述の平方因子をもつことの翻訳をスムーズにできたかどうかは差がつくでしょう。