座標空間内の 4 点 O$(0,0,0)$，A$(2,0,0)$，B$(1,1,1)$，C$(1,2,3)$ を考える。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

(2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

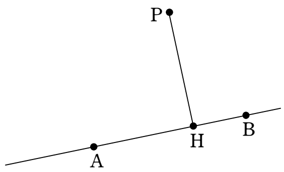
(3) 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O，H，B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。

＜ ’23 東京大 ＞

【戦略】

(1) P(a,b,c) **などとおき，内積計算をするだけなので，機械的です。**

(2)

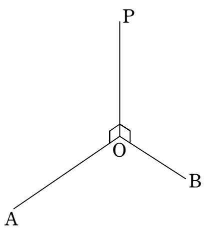


という状況であり，直線 AB **上の点** H **を**

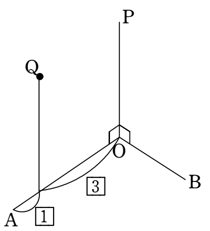
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表現し，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ **という直交条件から** t **を特定します。**

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ **という状況から**
右のような状況であることは分かります。

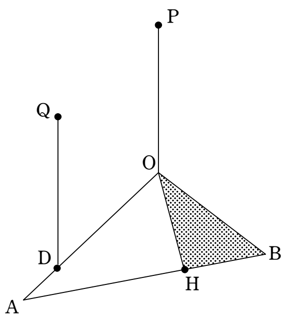


$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ **と定まる点** Q **については**

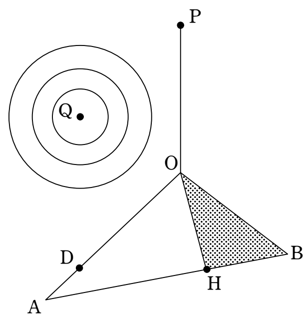


であることになります。

さらに，(2) **が正しく計算できていれば，**$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ **なので**



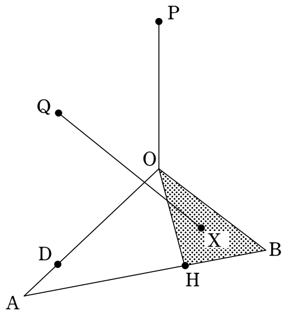
のようなシチュエーションとなるでしょう。



と，Q **を中心として球面を膨らませていくイメージで考えると，この球面** S **と三角形** OHB(**内部を含む**) **が共有点をもつためには，この三角形** OHB **の内部及び周上の点** X **に対して**

$$(\mathrm{QX}\text{ の最小値})\leqq r\leqq(\mathrm{QX}\text{ の最大値})$$

ということになります。



ただ，$\mathrm{QX}=\sqrt{\mathrm{DX}^2+\mathrm{DQ}^2}=\sqrt{\mathrm{DX}^2+\mathrm{OP}^2}=\sqrt{\mathrm{DX}^2+2}$ **なので，**

DX **の最大と最小を考えればよくなり，平面の話に帰着できます。**

【解答】

(1)　P(a, b, c)とすると，$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2a \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a+b+c \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=a+2b+3c \end{cases}$

条件より，$\begin{cases} 2a=0 \\ a+b+c=0 \\ a+2b+3c=1 \end{cases}$　で，これら3式から

$a=0$，$b=-1$，$c=1$ を得るため，P$(0,\ -1,\ 1)$ …【答】

(2)　Hは直線AB上の点なので，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\begin{pmatrix}2-t\\t\\t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表せる。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2-t\\t\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\t+1\\t-1\end{pmatrix}$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ …①

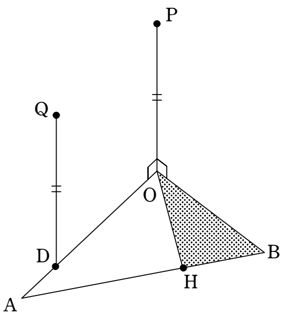
$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，$-(2-t)+1\cdot(t+1)+1\cdot(t-1)=0$

したがって，$t=\dfrac{2}{3}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ …【答】

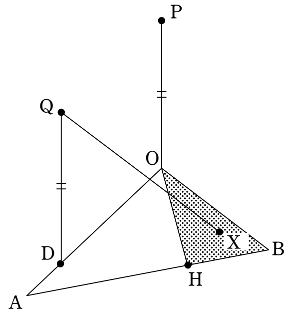
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点Dをとると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるため

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ …②

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であること，及び，(2)よりHは線分ABを2：1に内分する点であることを考えると，位置関係は次の(図1)のようになる。



(図1)



(図2)

△OBHの周，及び内部にある点Xに対して，直角三角形QDXに対して三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{QX}&=\sqrt{\mathrm{DX}^2+\mathrm{QD}^2}\quad(\text{(図2)参照})\\&=\sqrt{\mathrm{DX}^2+\mathrm{OP}^2}\quad(\because\ ②)\\&=\sqrt{\mathrm{DX}^2+2}\quad(\because\ (1))\ \cdots(*)\end{aligned}$$

求める r の範囲は

(QXの最小値)$\leqq r\leqq$(QXの最大値) …(**)

であるため，QXの最小値と最大値について考えることにする。

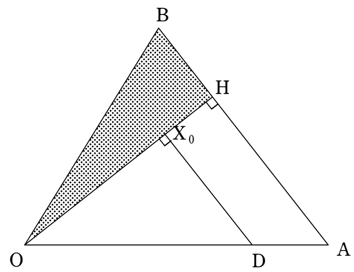
【QXの最小値について】

(*)よりDXが最小となるときを考えればよい。

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である。



(図3)

(図3)のようにDから線分OHに下ろした垂線の足を $\mathrm{X_0}$ としたとき，DXの最小値は $\mathrm{DX_0}$ である。

$\triangle\mathrm{ODX_0}\backsim\triangle\mathrm{OAH}$ で相似比は OD：OA＝3：4

ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathrm{DX_0}&=\frac{3}{4}\mathrm{AH}\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{AB}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because\ ①)\end{aligned}$$

ゆえに，DXの最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(*)より，QXの最小値は $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

【 QX の最大値について】

$(*)$ より DX が最大となるときを考えればよい。

$$\mathrm{DO}=\frac{3}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

より， $\mathrm{DB}=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\frac{3}{2}$

これより，DX は X が O または B に一致するときに最大値 $\frac{3}{2}$ となる。

$(*)$ より，QX の最大値は $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$(**)$ より，求める r の範囲は　$\frac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{17}}{2}$ …【答】

【総括】

(1)，(2) までは機械的な計算で片付くため，試験場補正を考えたとしても確保したいレベルです。

(3) はある程度状況を整理する必要があります。

図形的な考察を要するほか，球と三角形板が共有点をもつことを考えるにあたり，球の中心 Q からの最大距離と最小距離に注目して題意を噛み砕く必要もあり，高い次元での総合力が問われています。

また，解答ではある程度の見やすさを優先して図に x 軸，y 軸，z 軸を書き込まず，相対的な位置関係を見やすい方向から書きました。

この辺りについて律儀に図を書こうと躍起にやりすぎると時間を失うだけでなく，混乱しかねません。