2023年度 東京大学 理系 第3問

a を実数とし，座標平面上の点 $(0, a)$ を中心とする半径1の円の周を C とする。

(1) C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2) a は(1)で求めた範囲にあるとする。C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。S 上の点Pに対し，点Pでの C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする。$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる2点Q，Rが存在するような a の範囲を求めよ。

＜ '23 東京大 ＞

【戦略】

(1) **C 上の各点 $(\cos\theta, a+\sin\theta)$ が $y > x^2$ を満たしていると捉え，**

$$a + \sin\theta > \cos^2\theta \cdots (*)$$

が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす全ての θ で成立するような a の条件を考えます。

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ に注意して $(*)$ を整理すると，

$$a > -\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

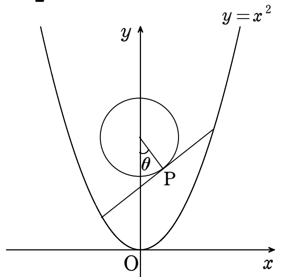
と整理できます。

これが $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす任意の θ で成立するわけですから，

右辺が1番小さくても成立する

と考え，右辺の最小値を考えればよく，$a > \dfrac{5}{4}$ が得られます。

(2) **円のうち右下のエリアの周上の点なので，$(\cos\theta, a+\sin\theta)$ のまま立式すると，θ の範囲が $\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ ということになり，それを嫌うのであれば，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ という比較的分かりやすい範囲になるように**



と θ を設定することになります。すると，$\mathrm{P}(\sin\theta, a-\cos\theta)$ となりますから，

Pにおける接線の式を立てる → $y = x^2$ と連立して2次方程式を得るという部分までは一直線です。

この2次方程式の解を α，β としたとき，もちろんこの α，β は交点の x 座標を与えますから，${L_{\mathrm{P}}}^2 = (\beta-\alpha)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2$ ですが，一方で解と係数の関係から $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ は手元にある状態ですから，${L_{\mathrm{P}}}^2$ が θ で表せます。

ただ，途中で $p = \dfrac{1}{\cos\theta}$ などとおくと，${L_{\mathrm{P}}}^2$ が p についての4次関数として現れ，結局はこの4次関数が極値をもつための条件を求めることに帰着します。

【解答】

(1) C 上の点 $(\cos\theta, a+\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ に対して

$$a + \sin\theta > \cos^2\theta \cdots (*)$$

を満たすような a の条件を考えればよい。

これは，$a + \sin\theta > 1 - \sin^2\theta$，すなわち

$$a > -\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

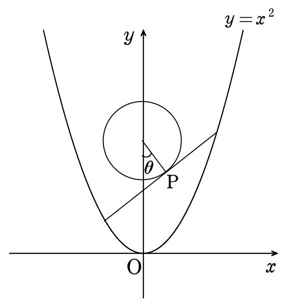
と変形できる。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，右辺の最小値は $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ のときに $\dfrac{5}{4}$

ゆえに，$a > \dfrac{5}{4}$ であれば，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の全ての θ に対して $(*)$ が成立する。

求める a の範囲は $a > \dfrac{5}{4}$ …【答】

(2) 図のように θ $\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる。



このとき，S 上の点Pの座標は

$(\sin\theta, a-\cos\theta)$

とおける。

$x^2 + (y-a)^2 = 1$ 上の点Pにおける接線の方程式は

$$(\sin\theta)x + (-\cos\theta)(y-a) = 1$$

これと $y = x^2$ を連立して y を消去すると

$$(\sin\theta)x - (\cos\theta)(x^2 - a) = 1$$

すなわち，$(\cos\theta)x^2 - (\sin\theta)x - a\cos\theta + 1 = 0 \cdots (*)$

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta > 0$ であり，$(*)$ は2次方程式である。

Pは $y > x^2$ で表される領域内の点であり，$(*)$ は必ず2つの実数解をもち，それらを α，β $(\alpha < \beta)$ とすると，解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \ (= \tan\theta) \\ \alpha\beta = \dfrac{-a\cos\theta + 1}{\cos\theta} \left(= -a + \dfrac{1}{\cos\theta}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} {L_{\mathrm{P}}}^2 &= (\beta-\alpha)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2 \\ &= (\beta-\alpha)^2 + (\beta+\alpha)^2(\beta-\alpha)^2 \\ &= (\beta-\alpha)^2\{1 + (\beta+\alpha)^2\} \\ &= \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}\{1 + (\alpha+\beta)^2\} \\ &= \left\{\tan^2\theta + 4a - \frac{4}{\cos\theta}\right\}(1 + \tan^2\theta) \\ &= \left\{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 + 4a - \frac{4}{\cos\theta}\right\} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \left(\because\ 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\right) \end{aligned}$$

$p=\dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{P}}{}^2 &= \{\,p^2-4p+4a-1\,\}\,p^2 \\ &= p^4-4p^3+(4a-1)p^2 \ (\ =f(p) \text{ とおく }) \end{aligned}$$

また，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$0<\cos\theta\leqq 1$ なので，$p\geqq 1$

この範囲で p と θ は 1 対 1 に対応する。

$L_{\mathrm{Q}}=L_{\mathrm{R}}$ となる相異なる 2 点 Q，R が存在する。

⇔ $L_{\mathrm{Q}}=L_{\mathrm{R}}$ を満たす Q，R に対応する

θ_{Q}，θ_{R} $\left(0\leqq\theta_{\mathrm{Q}}<\dfrac{\pi}{2}\text{，}0\leqq\theta_{\mathrm{R}}<\dfrac{\pi}{2}\text{，}\theta_{\mathrm{Q}}\neq\theta_{\mathrm{R}}\right)$

が存在する。

⇔ $f(p_{\mathrm{Q}})=f(p_{\mathrm{R}})$ を満たす

p_{Q}，p_{R} $(p_{\mathrm{Q}}\geqq 1\text{，}p_{\mathrm{R}}\geqq 1\text{，}p_{\mathrm{Q}}\neq p_{\mathrm{R}})$

が存在する …(☆)

より，(☆) を満たすような a の範囲を求める。

$$\begin{aligned} f'(p) &= 4p^3-12p^2+2(4a-1)p \\ &= 2p\,\{\,2p^2-6p+(4a-1)\,\} \\ &= 2p\left\{2\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+4a-\frac{11}{2}\right\} \end{aligned}$$

[1]　$4a-\dfrac{11}{2}\geqq 0$，すなわち $a\geqq\dfrac{11}{8}$ のとき

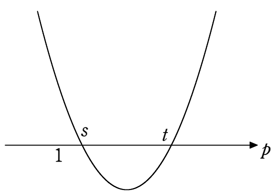
$p\geqq 1$ の範囲では $f'(p)\geqq 0$ であり，この範囲で $f(p)$ は単調増加

ゆえに，(☆) を満たすような p_{Q}，p_{R} は存在しない。

[2]　$4a-\dfrac{11}{2}<0$，すなわち $a<\dfrac{11}{8}$ のとき

((1) も考えると $\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}$ のとき)

$y=2p^2-6p+4a-1$ のグラフの概形は



というようになり，

p	1	…	s	…	t	…
$f'(p)$		+	0	−	0	+
$f(p)$		↗	極大	↘	極小	↗

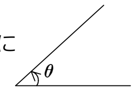
という増減表を得て，(☆) を満たすような p_{Q}，p_{R} が存在する。

[1]，[2] より，求める a の値の範囲は $\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}$ …【答】

【総括】

(1) は煮るなり焼くなり出来る話題であると同時に，円と放物線の位置関係は結構ウルサイ話題なので，逆に目移りしてしまうかもしれません。

結局は円上の点をパラメータ表示で表すのが一番シンプルです。

ただ，(1) ではいつものように  と測っても問題ありませんが (2) だと θ の範囲的にイヤだなと思えてきます。

もちろん，(1) でおいたように $(\cos\theta\text{，}a+\sin\theta)$ としてやっても本質的には変わりませんし，符号などへの注意力さえあれば本問同様に捌ききれる範疇です。(この場合，$p=\dfrac{1}{\sin\theta}$ などとおくと，$L_{\mathrm{P}}{}^2$ が p についての 4 次関数となります。)

また，(2) では $L_{\mathrm{Q}}=L_{\mathrm{R}}$ となる相異なる 2 点 Q，R が存在するということを数式的に翻訳し，読み替えていく力が必要です。