黒玉3個，赤玉4個，白玉5個が入っている袋から玉を1個ずつ取り出し，取り出した玉を横一列に12個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

＜ ’23 東京大 ＞

【戦略】

(1) **隣り合わない並べ方を考える際には**

「隙間に放り込む」

という手法を用いるのが一般的です。

そこで，先に黒と白をフリーダムに並べ，隙間に赤を放り込みます。

(2) **どの赤玉も隣り合っていないということが前提条件です。**

その中で，黒玉も隣り合っていない並びを考えます。

鬱陶しいのは，

白を先に並べ，$5!$ **通り**

黒を隙間に放り込み ${}_6P_3$

赤を隙間に放り込み ${}_9P_4$

とやると間違ってしまいます。

というのも，

白と黒を並べた段階では，黒は隣り合っていても許される

わけです。

ex：**白　黒↑黒　白　白　黒　白　白**

しかし，↑に赤を入れれば，黒は隣り合いません。

ただ，これに気がつけば，場合分けの必要性にも気がつくでしょう。

【解答】

(1) 玉に番号をつけるなどして，12個の玉をすべて区別する。

全ての玉の並べ方は $12!$ 通り

その中でどの赤玉も隣り合わない並べ方を求める。

先に黒玉，白玉の計8個を並べると，その並べ方は $8!$ 通り

∧○∧○∧○∧○∧○∧○∧○∧○∧

そのうち，図の9ヵ所から赤玉を入れて並べればよく，

${}_9P_4=9\cdot8\cdot7\cdot6$【通り】

よって，$p=\dfrac{8!\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{12!}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9}=\dfrac{14}{55}$ …【答】

(2) どの赤玉も隣り合わない $8!\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6$【通り】 を全事象として
そのうちどの黒玉も隣り合っていない場合が何通りあるかを
求める。

白玉と黒玉を先に並べたときに次のような場合が考えられる。

[1] どの黒玉も隣り合っていないとき

白玉の並べ方は $5!$ 通り

黒玉は隙間に入れればよく，${}_6P_3$ 通り

赤玉の並べ方は ${}_9P_4$ 通り

よって，$5!\cdot{}_6P_3\cdot{}_9P_4$【通り】

[2] 2個の黒玉が隣り合っているとき

どの黒玉が隣り合っているかで ${}_3C_2=3$【通り】

隣り合っている黒を一まとめにBとし，
白玉を w_1，w_2，w_3，w_4，w_5，残った黒玉を b とする。

w_1，w_2，w_3，w_4，w_5，B，b を B と bが隣り合わないように並べる方法は，白玉を並べ（5!通り），その隙間に B，b を入れる（${}_6P_2$ 通り）という $5!\cdot{}_6P_2$【通り】

B内での並びは $2!$ 通り

このとき，配置は例えば，

∧w∧w∧b↑b∧w∧b∧w∧w∧

等となっている。

赤玉を入れる場所は↑は確定で，残りは8ヵ所の∧ から
3ヵ所選べばよく，${}_8C_3$ 通り

どの赤玉を並べるかは $4!$ 通り

よって，$3\cdot5!\cdot{}_6P_2\cdot2!\cdot{}_8C_3\cdot4!$【通り】

[3]　黒玉が 3 個連続しているとき

3 個の黒玉を一まとめに B として，白玉とともに並べる方法は $6!$ 通り

B 内での並べ方は $3!$ 通り

このとき，配置は例えば

$$\wedge^{\mathrm{w}}\wedge^{\mathrm{w}}\wedge^{\mathrm{w}}\wedge^{\mathrm{b}}\uparrow^{\mathrm{b}}\uparrow^{\mathrm{b}}\wedge^{\mathrm{w}}\wedge^{\mathrm{w}}\wedge$$

などとなっている。

赤玉を入れる場所は↑は確定で，残りは 7 ヵ所の∧ から 2 ヵ所選べばよく，${}_7\mathrm{C}_2$ 通り

どの赤玉を並べるかは $4!$ 通り

よって，$6!\cdot 3!\cdot {}_7\mathrm{C}_2\cdot 4!$【通り】

[1]，[2]，[3] から，赤玉，黒玉がともに隣り合わないような並べ方は

$$5!\cdot{}_6\mathrm{P}_3\cdot{}_9\mathrm{P}_4+3\cdot 5!\cdot{}_6\mathrm{P}_2\cdot 2!\cdot{}_8\mathrm{C}_3\cdot 4!+6!\cdot 3!\cdot{}_7\mathrm{C}_2\cdot 4!\ \text{【通り】}$$

ゆえに，

$$q=\frac{5!\cdot{}_6\mathrm{P}_3\cdot{}_9\mathrm{P}_4+3\cdot 5!\cdot{}_6\mathrm{P}_2\cdot 2!\cdot{}_8\mathrm{C}_3\cdot 4!+6!\cdot 3!\cdot{}_7\mathrm{C}_2\cdot 4!}{8!\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}$$

$$=\frac{103}{168}\ \cdots\text{【答】}$$

【総括】

(1) は落とせません。

変なことを考え出すと混乱しますので，

確率では全てのものを区別せよ

という言葉に従い，番号をつけるなどして区別して考えた方が安全です。

危険なのは (2) で，戦略で述べたように，

白を並べ，黒を隙間に放り込み，赤を隙間に放り込む

とやるとものの見事に失敗します。

また，少しでもミスを減らすために，具体的な計算は最後にしておき，出来る限り積の形のまま立式して約分を狙っていきましょう。