(1) 正の整数 k に対し，

$$A_k=\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し，

$$B_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく。極限 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

＜ '23 東京大 ＞

【戦略】

(1) $\int \sin(x^2)\,dx$ **というものはそのままでは計算不可能です。**

いずれにせよ， $\sqrt{k\pi}$ **，** $\sqrt{(k+1)\pi}$ **という目がチカチカする部分を少しでも軽減するために，** $x^2=X$ **などと置換してやります。**

積分区間は正の範囲ですから， $x=\sqrt{X}$ **として捌けばよく**

$2x\,dx=dX$ **より，** $dx=\dfrac{1}{2\sqrt{X}}dX$ **，積分区間は**

x	$\sqrt{k\pi}$	$\to$	$\sqrt{(k+1)\pi}$
X	$k\pi$	$\to$	$(k+1)\pi$

となるため， $A_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin X|}{2\sqrt{X}}dX$ **となります。**

もちろん直接の積分計算は不可能です。

そこで，定積分の不等式評価の代表的な考え方

「体の一部を定数化」

で仕留めます。

積分区間 $k\pi \leqq X \leqq (k+1)\pi$ **において**

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{X}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}$$

ですから，

$$\frac{|\sin X|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{|\sin X|}{2\sqrt{X}} \leqq \frac{|\sin X|}{2\sqrt{k\pi}}$$

と評価でき，ここからは手なりの基本計算で片付きます。

(2) **当然 (1) の不等式を利用した「はさみうちの原理」を睨みます。**

(1) **の結果を活用しようと思えば**

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} + \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}} + \cdots + \int_{\sqrt{(2n-1)\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}$$

$$=A_n+A_{n+1}+\cdots\cdots+A_{2n-1}\left(=\sum_{k=n}^{2n-1}A_k\right)$$

と見たくなるはずです。

(1) **の結果を用いると，** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$

と評価でき，形的に区分求積法で仕留める算段がつくでしょう。

【解答】

(1) $x^2=X$ とおく。$x \geqq 0$ の範囲では $x=\sqrt{X}$

このとき，$2x\,dx=dX$ で，$dx=\dfrac{1}{2\sqrt{X}}dX$

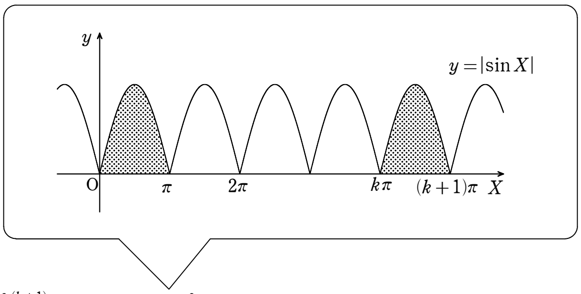
ゆえに，$A_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin X|}{2\sqrt{X}}dX$

積分区間 $k\pi \leqq X \leqq (k+1)\pi$ において

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{X}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}$$

すなわち，$\dfrac{|\sin X|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \dfrac{|\sin X|}{2\sqrt{X}} \leqq \dfrac{|\sin X|}{2\sqrt{k\pi}}$

ゆえに，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin X|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\,dX \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin X|}{2\sqrt{k\pi}}\,dX$



ここで，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin X|\,dX=\int_0^{\pi}\sin X\,dX$

$$=\Big[-\cos X\Big]_0^{\pi}$$

$$=2$$

したがって，$\dfrac{2}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \dfrac{2}{2\sqrt{k\pi}}$ ，すなわち

$\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ が成り立つ。

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}|\sin(x^2)|dx$

$$=\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}|\sin(x^2)|\,dx+\int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}}|\sin(x^2)|\,dx+\cdots+\int_{\sqrt{(2n-1)\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}|\sin(x^2)|\,dx$$

$$=\sum_{k=n}^{2n-1}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}|\sin(x^2)|\,dx$$

$$=\sum_{k=n}^{2n-1}A_k$$

ここで，(1) より，$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \sum_{k=n}^{2n-1}A_k \leqq \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$

ゆえに，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$

$$(\text{最右辺})=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\pi}}\longrightarrow\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x\pi}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)$$

$$(\text{最左辺})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\pi}}\longrightarrow\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x\pi}}\,dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)$$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}B_n=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)$ …【答】

【総括】

定積分に関する不等式評価の問題で，多くの人が苦手とするトピックスの一つです。

$\displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}|\sin(x^2)|\,dx$ を面積と捉え直接的に評価することも考えたかもしれませんが，積分区間の幅が，$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}$ と汚いため，見通しが立ちづらいものがあります。

このあたりから置換積分にシフトしていきたいところですが，決して簡単ではなく，スムーズにいかなかった受験生も多かったかもしれません。

(2) は (1) の結果を認めればそこまで大変ではないため，試験場では (2) だけでも確保したいところで，冷静な判断が求められるでしょう。