1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ。

＜ ’21 一橋大 ＞

【戦略 1】

素数でない合成数の方が数えやすいのは言うまでもないでしょう。

そこで，素数でないものが 750 個以上あることを示すことにします。

1 が素数でないことに注意すると，2 ～ 1000 までの 999 個の数の中で合成数が 749 個以上あることを示せばよいことになります。

そこで，2 以上 1000 以下の自然数全体の集合を U とし，その部分集合で

2 の倍数の集合を A (この時点で 500 個ある)

に加えて、

3 の倍数の集合を B

まで考えてみると，

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\
&=\left[\frac{1000}{2}\right]+\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{2\cdot 3}\right]\\
&=667
\end{aligned}
$$

ですから，749 個にはまだまだ届きません。

そこで，5 の倍数の集合を C

として，$n\,(A\cup B\cup C)$ を計算してみます。

$$
\begin{aligned}
&n(A\cup B\cup C)\\
&\quad=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\
&\quad=734
\end{aligned}
$$

であり，2，3，5 そのものは素数であることを考えると 731 個が 2，3，5 という素因数をもつ合成数ということになり，あと 18 個足りません。

ただ，ここまで近づいたら，素因数 7，11，… のみを使ってできる合成数を手探りで見つけて補っていきます。

7，11，…，p という k 個の素因数のみでできる合成数としては，少なくとも

7^2，11^2，…，p^2 という k 個と

$7\cdot 11$，$7\cdot 13$，… という $mn\ (m\leqq n)$ という形の ${}_k\mathrm{C}_2=\dfrac{k\,(k-1)}{2}$

という $k+\dfrac{k\,(k-1)}{2}=\dfrac{k\,(k+1)}{2}$【個】 があり，$\dfrac{k\,(k+1)}{2}\geqq 18$ を満たすものとしては $k=6$，7，… ですから，

7，11，13，17，19，23 という 6 個の素因数のみをもつ合成数を考えていきます。

【解 1】

1 は素数でない事に注意して，2 以上 1000 以下の自然数全体の集合を U とする。

U の部分集合で

2 の倍数の集合を A
3 の倍数の集合を B
5 の倍数の集合を C

とする。

$$
n(A)=\left[\frac{1000}{2}\right]=500
$$
$$
n(B)=\left[\frac{1000}{3}\right]=333
$$
$$
n(C)=\left[\frac{1000}{5}\right]=200
$$

$$
n(A\cap B)=\left[\frac{1000}{2\cdot 3}\right]=166
$$
$$
n(B\cap C)=\left[\frac{1000}{3\cdot 5}\right]=66
$$
$$
n(C\cap A)=\left[\frac{1000}{5\cdot 2}\right]=100
$$

$$
n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{1000}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=33
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&n(A\cup B\cup C)\\
&\quad=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\
&\quad=500+333+200-166-66-100+33\\
&\quad=734
\end{aligned}
$$

この 734 個の数のうち，2，3，5 は素数であるので，

731 個が素因数 2 または 3 または 5 をもつ合成数ということになる。

ここで，素因数 7，11，13，17，19，23 のみをもつ合成数について考える。

まず，m^2 という形のものは 7^2，11^2，…，23^2 と 6 個ある。

次に，$mn\ (m<n)$ という形のものは ${}_6\mathrm{C}_2=15$【個】 ある。

U のうち先ほどの 731 個と合わせて，少なくとも

$731+6+15=752$【個】

が合成数ということになる。

U の要素 999 個のうち少なくとも 752 個が合成数ということなので素数は多くとも

$999-752=247$【個】

ということになり，250 個以下ということになる。

以上から題意は示された。

【戦略 2】

1 は素数ではないため，結局 2 以上 1000 以下の自然数に含まれる合成数が 749 個以上あることを示せばいいわけで，方針的には【戦略 1】同様です。

【戦略 1】では

$$n(A\cup B\cup C)=734$$

であり，2，3，5 そのものを除く 731 個が合成数となり，目標の 749 個には 18 個届きません。

そこで，少しオーバーですが，U の部分集合のうち

7 の倍数の集合 D

まで考えて，$n(A\cup B\cup C\cup D)$ を計算することも考えられます。

【解 2】

1 は素数でない事に注意して，2 以上 1000 以下の自然数全体の集合を U とする。

U の部分集合で

2 の倍数の集合を A
3 の倍数の集合を B
5 の倍数の集合を C
7 の倍数の集合を D

とする。

$$n(A)=\left[\frac{1000}{2}\right]=500$$
$$n(B)=\left[\frac{1000}{3}\right]=333$$
$$n(C)=\left[\frac{1000}{5}\right]=200$$
$$n(D)=\left[\frac{1000}{7}\right]=142$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{1000}{2\cdot3}\right]=166$$
$$n(A\cap C)=\left[\frac{1000}{2\cdot5}\right]=100$$
$$n(A\cap D)=\left[\frac{1000}{2\cdot7}\right]=71$$
$$n(B\cap C)=\left[\frac{1000}{3\cdot5}\right]=66$$
$$n(B\cap D)=\left[\frac{1000}{3\cdot7}\right]=47$$
$$n(C\cap D)=\left[\frac{1000}{5\cdot7}\right]=28$$

$$n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{1000}{2\cdot3\cdot5}\right]=33$$
$$n(A\cap B\cap D)=\left[\frac{1000}{2\cdot3\cdot7}\right]=23$$
$$n(A\cap C\cap D)=\left[\frac{1000}{2\cdot5\cdot7}\right]=14$$
$$n(B\cap C\cap D)=\left[\frac{1000}{3\cdot5\cdot7}\right]=9$$

$$n(A\cap B\cap C\cap D)=\left[\frac{1000}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]=4$$

$$\begin{aligned}
&n(A\cup B\cup C\cup D)\\
&=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)\\
&\quad-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap D)-n(B\cap C)-n(B\cap D)-n(C\cap D)\\
&\quad+n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)+n(B\cap C\cap D)\\
&\quad-n(A\cap B\cap C\cap D)\\
&=500+333+200+142-166-100-71-66-47-28\\
&\quad+33+23+14+9-4\\
&=772
\end{aligned}$$

この 772 個の数のうち，2，3，5，7 は素数であるので，

768 個が素因数 2 または 3 または 5 または 7 をもつ合成数ということになる。

U の要素 999 個のうち少なくとも 768 個が合成数ということなので
素数は多くとも

$$999-768=231\text{【個】}$$

ということになり，250 個以下ということになる。

以上から題意は示された。

【総括】

下手すると小学生でも問題の意味が通じる題意で，試験場では逆に面食らった受験生も多かったことでしょう。

1 は素数ではないため，合成数が 749 個以上あることを目指すわけですが，

合成数を重複なく数え上げられているかどうか

というところに採点基準の重きがおかれているでしょう。

例えば，素因数 7 をもつものを数えると言っても，$2\cdot7$，$3\cdot7$ などは，$n(A)$，$n(B)$ の中で既に数えられています。

自分では 749 個以上数えられていたつもりでも，数え方がマズく，重複が発生してしまっている恐れはあるので，出来不出来の差は案外つくと思われますし，出来ていたつもりになりやすい問題かもしれません。

和集合の要素の個数を数え上げる包除原理については，2 個，3 個の和集合だけでなく，一般的にできるようにしておきましょう。