複素数の２乗とピタゴラス数

　有理数 a，b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば，a，b は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。

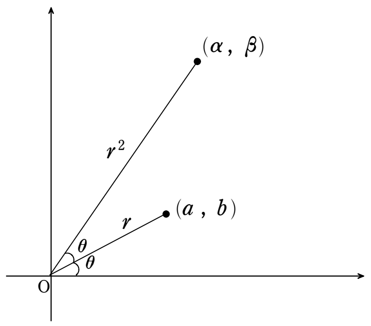
＜ '20 千葉大 ＞

【戦略 1】

$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ としたとき，ド・モアブルの定理より

$$(a+bi)^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

ですから，$(a+bi)^2=\alpha+\beta i$ としたとき



というイメージであり，$\begin{cases} a^2-b^2=\alpha \\ 2ab=\beta \end{cases}$ （α，β は整数） **です。**

これより，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=r^4\\&=(r^2)^2\\&=(a^2+b^2)^2\end{aligned}$$

ということから，$(a^2+b^2)^2$ が整数ということになります。

よって，有理数 a^2+b^2 は整数ということになり，

$$a^2+b^2=\gamma \quad (\gamma \text{ は整数})$$

と表せます。

これにより，$a^2=\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$，$b^2=\dfrac{\gamma-\alpha}{2}$ **を得ます。**

ここで満を持して $a=\dfrac{n}{m}$ （m，n は互いに素な整数で，$m\geqq 1$） **とすると，**

$$\frac{n^2}{m^2}=\frac{\gamma+\alpha}{2} \iff m^2(\gamma+\alpha)=2n^2$$

ということになり，m，n が互いに素ということから，

$$\gamma+\alpha=n^2N \quad (N \text{ は整数})$$

と表せ，$m^2N=2$ ということになります。

つまり，$m^2=1$ となるしかなく，$m=1$ を得て解決です。

b についても同様にして解決できます。

【解 1】

$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$ であり，$\begin{cases} \text{実部は } a^2-b^2 \\ \text{虚部は } 2ab \end{cases}$

そこで，$\begin{cases} a^2-b^2=\alpha & \cdots ① \\ 2ab=\beta & \cdots ② \end{cases}$ （α，β は整数）とおくと

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\\&=a^4+2a^2b^2+b^4\\&=(a^2+b^2)^2\end{aligned}$$

これより，$(a^2+b^2)^2$ が整数となり，有理数 a^2+b^2 は整数となる。

そこで，$a^2+b^2=\gamma$ …③（γ は整数）とおくと，①，③ より

$$a^2=\frac{\gamma+\alpha}{2},\quad b^2=\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

ここで，$a=\dfrac{n}{m}$ （m，n は互いに素な整数で，$m\geqq 1$）とおくと

$$\frac{n^2}{m^2}=\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

これより，$m^2(\gamma+\alpha)=2n^2$ であり，m，n は互いに素であることから，$\gamma+\alpha$ が n^2 の倍数である必要があり，

$$\gamma+\alpha=n^2N \quad (N \text{ は整数})$$

と表せる。

このとき，$m^2n^2N=2n^2$，すなわち $m^2N=2$

したがって，自然数 m は $m=1$ となるしかなく，$a=\dfrac{n}{1}$（＝整数）となる。

同様に，$b=\dfrac{\ell}{k}$ （k，ℓ は互いに素な整数で，$k\geqq 1$）とおくと

$$\frac{\ell^2}{k^2}=\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

これより，$k^2(\gamma-\alpha)=2\ell^2$ であり，k，ℓ は互いに素であることから，$\gamma-\alpha$ が ℓ^2 の倍数である必要があり

$$\gamma-\alpha=\ell^2M \quad (M \text{ は整数})$$

と表せる。

このとき，$k^2\ell^2M=2\ell^2$，すなわち $k^2M=2$

したがって，自然数 k は $k=1$ となるしかなく，$b=\dfrac{\ell}{1}$（＝整数）となる。

以上から，有理数 a，b は整数となる。

【戦略 2】

初めから有理数 a , b を

$$a=\frac{n}{m},\ b=\frac{\ell}{k}\ \left(\begin{array}{l} m,\ n \text{ は互いに素な整数で } m>0 \\ k,\ \ell \text{ は互いに素な整数で } k>0 \end{array}\right)$$

と設定する人も多いと思います。

このとき , $(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$ ですから

$$\begin{cases} a^2-b^2=\alpha & \cdots ① \\ 2ab=\beta & \cdots ② \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は整数})$$

と設定でき ,

$$\begin{cases} \dfrac{n^2}{m^2}-\dfrac{\ell^2}{k^2}=\alpha & \cdots ① \\ \dfrac{2n\ell}{mk}=\beta & \cdots ② \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は整数})$$

となります。

目標は $m=1$, $k=1$ ですが , ① より , a , b どちらかが整数であると示されれば , 残りはほぼ自動的に示されます。

そこで , a , b どちらか一方に集中するため , 片方に消えていただくことにします。

ここでは , ② から ,

$$\frac{\ell}{k}=\frac{\beta m}{2n}$$

と b に相当する $\dfrac{\ell}{k}$ を消去して ① に代入します。

(このとき , $n\neq 0$, すなわち $a\neq 0$ である必要があり , 場合分けの必要性が出てきます。解答では , チマチマした $a=0$. $b=0$ という特殊な場合はちゃっちゃと個別検証で片づけてしまうことにします。)

さて , このとき , ① に代入すると ,

$$\beta^2m^4=4n^2(n^2-\alpha m^2)$$

という関係式を得ます。

m , n は互いに素ですから , $\beta=nB$ (B は整数) と表せることになります。

すると , $B^2m^4=4(n^2-\alpha m^2)$ $\cdots(★)$ となります。

一方 , $\dfrac{\ell}{k}=\dfrac{\beta m}{2n}$ でしたから , $\dfrac{\ell}{k}=\dfrac{Bm}{2}$ を得て , 既約分数 $\dfrac{\ell}{k}$ の分母は 1 , 2 のいずれかということになります。

$k=1$ が目指すべき目標であるため , $k=2$ となることを否定すればよく , 背理法を考えることになります。

$k=2$ だと , $k(=2)$, $\ell(=Bm)$ は互いに素であるため , ℓ , B , m は奇数ということになります。

これは $(★)$ の両辺の偶奇が異なることになり , 矛盾します。

【解 2】

[1] $a=0$ のとき

$(a+bi)^2=(bi)^2=-b^2$ であり , 実部 $-b^2$ が整数であるとき , 有理数 b は整数である。

[2] $b=0$ のとき

$(a+bi)^2=a^2$ であり , 実部 a^2 が整数であるとき , 有理数 a は整数である。

[3] $a\neq 0$, $b\neq 0$ のとき

有理数 a , b は

$$a=\frac{n}{m},\ b=\frac{\ell}{k}\ \left(\begin{array}{l} m,\ n \text{ は互いに素な整数で } m>0,\ n\neq 0 \\ k,\ \ell \text{ は互いに素な整数で } k>0,\ \ell\neq 0 \end{array}\right)$$

とおける。

$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$ であり , $\begin{cases} \text{実部は } a^2-b^2 \\ \text{虚部は } 2ab \end{cases}$

実部 , 虚部が整数であるとき ,

$$\begin{cases} \dfrac{n^2}{m^2}-\dfrac{\ell^2}{k^2}=\alpha & \cdots ① \\ \dfrac{2n\ell}{mk}=\beta & \cdots ② \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は整数})$$

と表せる。

② より , $\dfrac{\ell}{k}=\dfrac{\beta m}{2n}$ $\cdots ③$ で , これを ① に代入すると

$$\frac{n^2}{m^2}-\frac{\beta^2m^2}{4n^2}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad 4n^4-\beta^2m^4=4\alpha m^2n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta^2m^4=4n^2(n^2-\alpha m^2) \quad \cdots ④$$

m , n は互いに素な整数であるため , β^2 が n^2 の倍数である必要がある。

これより , $\beta=nB$ (B は整数) と表せるため , ④ に代入すると

$$n^2B^2m^4=4n^2(n^2-\alpha m^2)$$

すなわち

$$B^2m^4=4(n^2-\alpha m^2) \quad \cdots(★)$$

一方 , $\beta=nB$ を ③ に代入すると

$$\frac{\ell}{k}=\frac{nBm}{2n}\text{ , すなわち }\frac{\ell}{k}=\frac{Bm}{2}$$

$\dfrac{Bm}{2}$ が約分されて既約分数 $\dfrac{\ell}{k}$ となるので , $k=1$ または 2

$k=2$ と仮定すると , $\ell=Bm$ で , $k(=2)$ と ℓ は互いに素であるため , ℓ は奇数なので , B , m も奇数

ところが , $(★)$ の左辺は奇数 , 右辺は偶数となり , 矛盾する。

よって，$k=1$ であり，① より

$$\frac{n^2}{m^2}-\ell^2=\alpha$$

すなわち，$\dfrac{n^2}{m^2}=\alpha+\ell^2$

これより，$\dfrac{n^2}{m^2}$ が整数となり，m，n は互いに素であるため

$$m=1$$

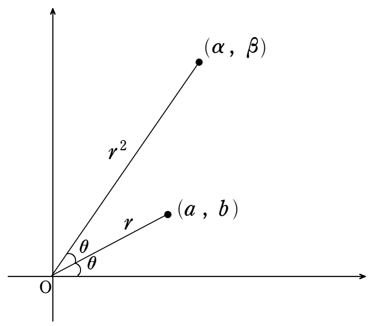
したがって，$a=\dfrac{n}{1}=n$，$b=\dfrac{\ell}{1}=\ell$ となり，a，b は整数である。

【総括】

シンプルな題意ですが，やるべきことが見えにくい難問です。

有理数 a，b を $a=\dfrac{n}{m}$，$b=\dfrac{\ell}{k}$ などと設定するかどうかという判断も難しいところですが，登場する文字が全て整数となっていないと，中々議論が進まないためどこかで $a=\dfrac{n}{m}$，$b=\dfrac{\ell}{k}$ と設定して話を進める方向性で考える必要があるでしょう。

【戦略 1】で考えたような



という複素数平面のイメージがあると

$$\begin{cases} a^2-b^2=\alpha \\ 2ab=\beta \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は整数})$$

から，

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= r^4 \\ &= (r^2)^2 \\ &= (a^2+b^2)^2 \end{aligned}$$

という関係に気づきやすく，$a^2+b^2=\gamma$（γ は整数）ということに辿り着きやすいと思います。

なお，この α，β，γ は

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

を満たす整数ということで，ピタゴラス数ということになります。

これは

$(2+i)^2=3+4i$ であり，$|3+4i|=5$ $\to$ $(3,\ 4,\ 5)$

$(3+2i)^2=5+12i$ であり，$|5+12i|=13$ $\to$ $(5,\ 12,\ 13)$

$(4+3i)^2=7+24i$ であり，$|7+24i|=25$ $\to$ $(7,\ 24,\ 25)$

というように，$(a+bi)^2$ を計算することで，ピタゴラス数が色々見つけられることを意味します。