xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって，次の 2 条件を満たしている。

(a)　A，B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる

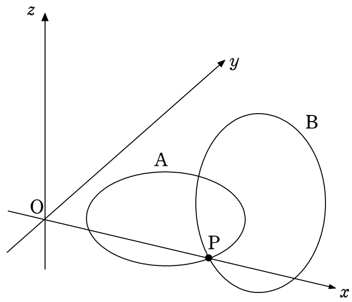
(b)　A，B は 1 点 P のみを共有し，P はそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし，円板とは円の内部と円周を合わせたものを意味する。

＜ ’99 東京大 ＞

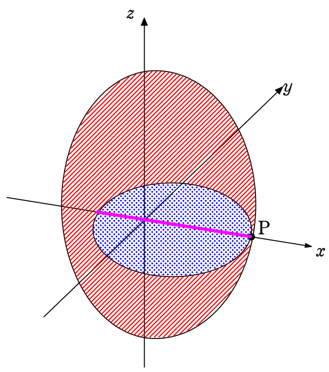
【戦略】

条件 (a)，(b) **が何を言っているのか，雑でもいいので絵を書いてみると**



のような状況です。

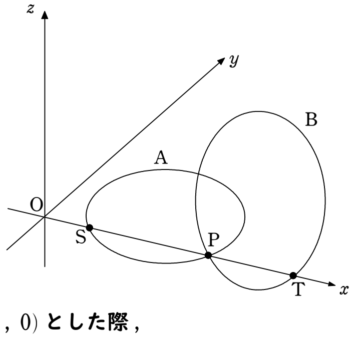
なお，今回は「円板」という中身の詰まった板を考えるため，



という状況はあり得ません。

円板 B に円板 A が食い込んでおり，図の太線上の各点全てが A，B の共通部分ということになり 1 点 P のみを共有するという状況に反するからです。

さて，最初の図を式的に立式しようと思うと，注目すべきは図の S，T の x 座標の値です。



P$(p, 0, 0)$，S$(s, 0, 0)$，T$(t, 0, 0)$ **とした際，**

$$-1 \leqq s \leqq p \leqq t \leqq 1$$

となっていればよいことになります。

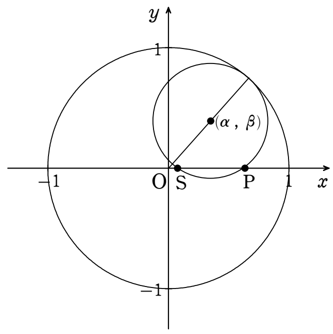
【解答】

xy 平面と xz 平面の共通部分は x 軸であるため，題意の P は x 軸上に存在する。

yz 平面に関する対称性から，P$(p, 0, 0)$ $(0 \leqq p < 1)$ としても一般性を失わない。

以下，p を固定して考える。

円板 A は $x^2+y^2 \leqq 1$ という領域内に存在し，半径を大きくしようとする場合，円板 A の境界線の円 C_A が $x^2+y^2=1$ に内接しているときを考えればよい。



(図 1)

C_A の中心の座標を (α, β)，半径を r_A とすると，C_A の方程式は

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2={r_A}^2$$

$y=0$ のとき，$(x-\alpha)^2+\beta^2={r_A}^2$ …①

ここで，(α, β) と P$(p, 0)$ との距離が r_A なので，

$${r_A}^2=(\alpha-p)^2+\beta^2 \left(=\alpha^2+\beta^2+p^2-2p\alpha \quad \cdots ②\right)$$

すなわち $\beta^2={r_A}^2-(\alpha-p)^2$ であるから，① に代入し，

$$(x-\alpha)^2+{r_A}^2-(\alpha-p)^2={r_A}^2$$
$$(x-\alpha)^2+(\alpha-p)^2=0$$
$$\{(x-\alpha)+(\alpha-p)\}\{(x-\alpha)-(\alpha-p)\}=0$$
$$(x-p)(x-2\alpha+p)=0$$

$x=p$ は P の x 座標を与えるので，(図 1) の S の x 座標は $x=2\alpha-p$

$-1 \leqq 2\alpha-p \leqq p$ となっていればよいため，$\dfrac{p-1}{2} \leqq \alpha \leqq p$ …(☆)

今，C_A は，$x^2+y^2=1$ に内接するので，

$$(1-r_A)^2=\alpha^2+\beta^2 \quad \cdots ③$$

②−③ より

$$2r_A-1=p^2-2p\alpha$$

すなわち

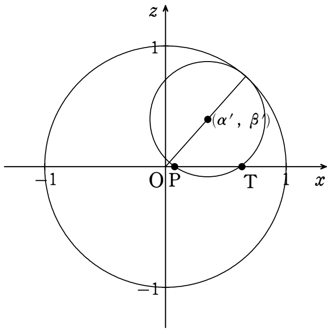
$$r_A=-p\alpha+\frac{p^2+1}{2}$$

$0 \leqq p < 1$ で p を固定するとき，r_A は α に関する単調減少の 1 次式であるため，(☆) の範囲では，$\alpha=\dfrac{p-1}{2}$ のとき r_A は最大値

$$-p \cdot \frac{p-1}{2}+\frac{p^2+1}{2}=\frac{p+1}{2}$$

となる。

一方，円板 B も $x^2+y^2\leqq 1$ という領域内に存在し，半径を大きくしようする場合，円板 B の境界線の円 C_{B} が $x^2+y^2=1$ に内接しているときを考えればよい。



(図 2)

C_{B} の中心の座標を $(\alpha',\ \beta')$，半径を r_{B} として先ほどと同様に C_{B} の x 切片の値を求めると，

$$x=p\ ,\ 2\alpha'-p$$

$x=p$ は P の x 座標を与えるので，(図 2) の T の x 座標は $x=2\alpha'-p$

$p\leqq 2\alpha'-p\leqq 1$ となっていればよいため，$p\leqq \alpha'\leqq \dfrac{p+1}{2}$ …(★)

先ほど同様に $r_{\mathrm{B}}=-p\alpha'+\dfrac{p^2+1}{2}$ を得る。

$0\leqq p<1$ で p を固定するとき，r_{B} は α' に関する単調減少の 1 次式であるため，(★) の範囲では $\alpha'=p$ のとき r_{B} は最大値

$$-p\cdot p+\frac{p^2+1}{2}=\frac{-p^2+1}{2}$$

となる。

以上から，$r_{\mathrm{A}}\leqq\dfrac{p+1}{2}$，$r_{\mathrm{B}}\leqq\dfrac{-p^2+1}{2}$ で，円板 A，B はそれぞれ独立に動くため，この等号は同時に成立し得る。

よって，p を $0\leqq p<1$ で固定したときの $r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}$ の最大値は

$$\frac{p+1}{2}+\frac{-p^2+1}{2}\left(=-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p+1\right)$$

ここで，p の固定を外す。

$$-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p+1=-\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

であり，$0\leqq p<1$ の範囲では $p=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

以上から，$r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}$ の最大値は $\dfrac{9}{8}$ … 答

【総括】

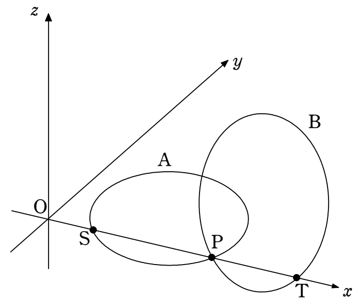
・問題文のシチュエーションが何を言っているのか

・そのシチュエーションが完成するためには式的に何が言えればよいのか

を見出すのにエネルギーが必要です。

また，様々な文字が入り乱れますが，それらの文字が独立に動くのか従属関係にあるのかを見失うことなく，適切に捌いていく力も求められます。

結局は戦略で述べた



というシチュエーションに対して，

$$-1\leqq s\leqq p\leqq t\leqq 1$$

と捌いていく方向性さえ見えれば，あとは腕力次第で何とかなると言っても過言ではないでしょう。

なお，円板 A，B の半径を大きくしようと最善を尽くした場合，内接するまで膨らませればよいことは感覚的に処理してしまいましたが，試験場ではそれ以上深入りしなくてもよいと思います。