$-2 \leqq t \leqq 2$ とし，x に関する方程式

$$x^3-3x=t$$

の解を α，β，γ $(\alpha \geqq \beta \geqq \gamma)$ とする。

(1)　β，γ を α を用いて表せ。ただし，t を用いてはならない。

(2)　α，β，γ を t の関数と考えて，定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\beta\gamma}{\alpha}\,dt$ の値を求めよ。

＜ '17 富山大 ＞

【戦略 1】

(1)　**$x^3-3x-t=0$ が $x=\alpha$，β，γ を解にもつということは**

$$x^3-3x-t=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解できるはずです。

僕らの興味は β，γ を生み出す 2 次方程式です。

t を使うなという指示があるため，
t を消しに行くのが自然です。

$t=\alpha^3-3\alpha$ なのですから，$x^3-3x-\alpha^3+3\alpha=0$ という 3 次方程式が α，β，γ を解にもつことになるわけですが，これが因数定理より

$$(x-\alpha)(\qquad\qquad\qquad)=0$$

という形になるのは当然見越せるはずです。

実際に，$(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)=0$ と因数分解でき，β，γ は

$$x^2+\alpha x+\alpha^2-3=0 \text{ の 2 解}$$

ということになり，$\beta \geqq \gamma$ という大小関係に気をつけて解の公式を用いて捌けば解決です。

(2)　**解と係数の関係から，$\beta\gamma=\alpha^2-3$ ですから，$\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-3}{\alpha}$**

と，α の式で表せます。

つまり，$\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\alpha^2-3}{\alpha}\,dt$ を求めることになります。

ただ，α を t の式に直し，$\displaystyle\int_{-2}^{2} (t \text{ の式})\,dt$ とするのは困難です。

そこで，dt ではなく，$d\alpha$ にするという「積分変数の変換」を考えます。

$t=\alpha^3-3\alpha$ ですから，$dt=(3\alpha^2-3)\,d\alpha$ ということで

$$\int_{-2}^{2} \frac{\alpha^2-3}{\alpha}\,dt=\int_{\bigcirc}^{\square} (\alpha \text{ の式})\,d\alpha$$

となるわけです。

あとは，t が $-2 \to 2$ と変化する際の α の範囲を求めます。

これについては，グラフを用いて視覚的に捌くのが得策です。

【解 1】

(1)　$x^3-3x=t$ が $x=\alpha$ を解にもつことから，$t=\alpha^3-3\alpha$

$x^3-3x-t=0$，すなわち

$$x^3-3x-\alpha^3+3\alpha=0$$

$$(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)=0$$

の解が α，β，γ である。

ゆえに，β，γ は $x^2+\alpha x+\alpha^2-3=0$ の 2 解であり，$\beta \geqq \gamma$ より

$$\beta=\frac{-\alpha+\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{2},\quad \gamma=\frac{-\alpha-\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{2} \quad \cdots \text{答}$$

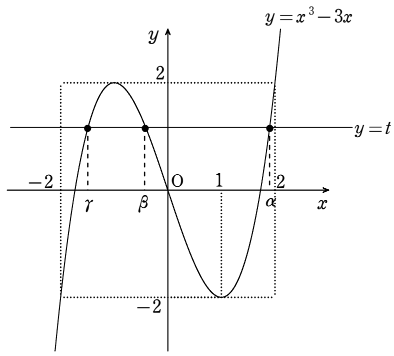
(2)　解と係数の関係から，$\beta\gamma=\alpha^2-3$ であり，$\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-3}{\alpha}$

また，$t=\alpha^3-3\alpha$ より，$dt=(3\alpha^2-3)\,d\alpha$

ここで，$y=x^3-3x$ のグラフについて，$y'=3(x+1)(x-1)$ で

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	-2	↗	2

$y=x^3-3x$ が奇関数であることに注意すると，次のグラフを得る。



$y=x^3-3x$ のグラフと $y=t$ の交点の x 座標が大きい方から

α，β，γ であることを考えると，

t	-2 $\to$ 2
α	1 $\to$ 2

ゆえに，

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{\beta\gamma}{\alpha}\,dt &= \int_{1}^{2} \frac{\alpha^2-3}{\alpha}\cdot(3\alpha^2-3)\,d\alpha \\
&= 3\int_{1}^{2} \frac{\alpha^4-4\alpha^2+3}{\alpha}\,d\alpha \\
&= 3\int_{1}^{2} \left(\alpha^3-4\alpha+\frac{3}{\alpha}\right)d\alpha \\
&= 3\left[\frac{1}{4}\alpha^4-2\alpha^2+3\log\alpha\right]_{1}^{2} \\
&= \frac{3}{4}(2^4-1^4)-6(2^2-1^2)+9(\log 2-\log 1) \\
&= 9\log 2-\frac{27}{4} \quad \cdots \text{答}
\end{aligned}$$

【戦略 2】(1) について

β，γ を生み出す 2 次方程式に興味をもつのは【戦略 1】同様です。

$x^3-3x-t=0$ についての解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3\\ \alpha\beta\gamma=t\end{cases}$$

であり，β，γ を生み出す 2 次方程式を得ようと思うと，$\begin{cases}\beta+\gamma\\ \beta\gamma\end{cases}$ に興味がいくはずです。

すると，$\beta+\gamma=-\alpha$ はすぐに得られます。

$\beta\gamma$ については，

$$\begin{aligned}\beta\gamma&=-3-\alpha\beta-\gamma\alpha\\ &=-3-\alpha(\beta+\gamma)\\ &=-3-\alpha\cdot(-\alpha)\\ &=\alpha^2-3\end{aligned}$$

と得られますから，β，γ は $X^2+\alpha X+\alpha^2-3=0$ の 2 解であることが分かります。

【解 2】(1) について

$x^3-3x-t=0$ の解が α，β，γ であるので，解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 \ \cdots ①\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3 \ \cdots ②\\ \alpha\beta\gamma=t\end{cases}$$

① より，$\beta+\gamma=-\alpha$ …③

② より，

$$\begin{aligned}\beta\gamma&=-3-\alpha\beta-\gamma\alpha\\ &=-3-\alpha(\beta+\gamma)\\ &=-3-\alpha\cdot(-\alpha) \quad (\because ③)\\ &=\alpha^2-3 \ \cdots ④\end{aligned}$$

③，④ より，X に関する 2 次方程式

$$X^2+\alpha X+\alpha^2-3=0$$

の 2 解が β，γ である。

条件 $\beta \geqq \gamma$ に注意すると，

$$\beta=\frac{-\alpha+\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{2}, \quad \gamma=\frac{-\alpha-\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{2} \ \cdots 答$$

【総括】

(1) は煮るなり焼くなり調理できるはずですが，(2) が沼にはまりかねません。

(1) を誘導と考え，$\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$ を $\dfrac{\alpha^2-3}{\alpha}$ と，α のみにする部分まではスムーズでしょうが，問題文の「α，β，γ を t の関数と考えて」という言葉を素直に受け取ってしまった人は

$\alpha=(t$ の式$)$ にしなきゃ

と躍起になり，ズタボロになるでしょう。(そういった意味で問題文が意地悪っちゃ意地悪です。)

$\alpha=(t$ の式$)$ にするということは実質的に $x^3-3x=t$ という 3 次方程式を解くことになり，容易ではありません。

$\displaystyle\int(t \text{ の式})\,dt$ にする方針はあきらめ，$\displaystyle\int(\alpha \text{ の式})\,d\alpha$ として捌こうという気持ちの切り替えが全てでしょう。

なお，$x^3-3x=t$ という 3 次方程式を解くことで (2) を捌く路線を参考として紹介します。

◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇ 参考 ◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

$-2 \leqq t \leqq 2$ より，$t=2\cos u$ $(0 \leqq u \leqq \pi)$ とおけ，グラフ的に，この 3 つの 3 次方程式の解もすべて $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあることから，これら 3 つの解も

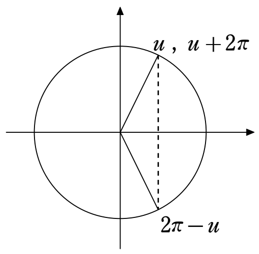
$$x=2\cos\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表すことができます。

すると，$8\cos^3\theta-6\cos\theta=2\cos u$ ，すなわち，$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos u$ となり，

$$\cos 3\theta=\cos u$$

を得ます。



$0 \leqq 3\theta \leqq 3\pi$ では

$$3\theta=u\ ,\ 2\pi-u\ ,\ u+2\pi$$

すなわち $\theta=\dfrac{u}{3}$ ，$-\dfrac{u}{3}+\dfrac{2}{3}\pi$ ，$\dfrac{u}{3}+\dfrac{2}{3}\pi$

であり，$x^3-3x=2\cos u$ という 3 次方程式の解が

$$x=2\cos\frac{u}{3}\ ,\ 2\cos\left(-\frac{u}{3}+\frac{2}{3}\pi\right),\ 2\cos\left(\frac{u}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)$$

という 3 つであることを意味します。

$0 \leqq u \leqq \pi$ ですから，$\begin{cases} 0 \leqq \dfrac{u}{3} \leqq \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\pi}{3} \leqq -\dfrac{u}{3}+\dfrac{2}{3}\pi \leqq \dfrac{2}{3}\pi \\ \dfrac{2}{3}\pi \leqq \dfrac{u}{3}+\dfrac{2}{3}\pi \leqq \pi \end{cases}$ で，角が一番小さいものから順に α，β，γ に対応するので，$\alpha=2\cos\dfrac{u}{3}$ ということになります。

すると，$\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-3}{\alpha}=\alpha-\dfrac{3}{\alpha}$ ということになり，$t=2\cos u$ とおいていたことから

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\frac{\beta\gamma}{\alpha}\,dt &= \int_{\pi}^{0}\left(\alpha-\frac{3}{\alpha}\right)\frac{dt}{du}\,du \\
&= \int_{\pi}^{0}\left(\alpha-\frac{3}{\alpha}\right)(-2\sin u)\,du \\
&= 2\int_{0}^{\pi}\left(\alpha-\frac{3}{\alpha}\right)\sin u\ du \\
&= 2\int_{0}^{\pi}\left(2\cos\frac{u}{3}-\frac{3}{2\cos\frac{u}{3}}\right)\sin u\,du \\
&= 4\int_{0}^{\pi}\cos\frac{u}{3}\ \sin u\ du-3\int_{0}^{\pi}\frac{\sin u}{\cos\frac{u}{3}}\,du \\
&= 12\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos\omega\sin 3\omega\,d\omega-9\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}\,d\omega \quad \left(\omega=\frac{u}{3}\ \text{とした}\right)
\end{aligned}$$

となります。

＜ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos\omega\sin 3\omega\,d\omega$ について ＞

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos\omega\sin 3\omega\,d\omega &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sin 4\omega+\sin 2\omega)\,d\omega \quad (\because\ \text{積和公式}) \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 4\omega-\frac{1}{2}\cos 2\omega\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

＜ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}\,d\omega$ について＞

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}\,d\omega &= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sin\omega-4\sin^3\omega}{\cos\omega}\,d\omega \\
&= 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\,d\omega-4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\omega}{\cos\omega}\cdot\sin\omega\,d\omega \\
&= 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\,d\omega-4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\,d\omega+4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin\omega\cos\omega\ d\omega \\
&= -\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\,d\omega+4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin\omega\cos\omega\ d\omega \\
&= \Big[\log(\cos\omega)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}}+4\left[\frac{1}{2}(\sin\omega)^2\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \log\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2}-\log 2
\end{aligned}$$

以上から，

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\frac{\beta\gamma}{\alpha}\,dt &= 12\cdot\frac{9}{16}-9\left(\frac{3}{2}-\log 2\right) \\
&= 9\log 2-\frac{27}{4}
\end{aligned}$$

となります。

このように $x^3-3x=2\cos u$ という 3 次方程式を実際に解くという路線は「チェビシェフの多項式」と呼ばれる上級トピックスを基にしたものですが，見ての通り経験に裏付けられた強靭な基礎力が必要で，試験場では逆に経験が仇となる危険性もあるでしょう。