円に内接する四角形 ABPC は次の条件（イ），（ロ）を満たすとする。

（イ） 三角形 ABC は正三角形である。

（ロ） AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ （$0<p<1$）の比に内分する。

このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$p$ を用いて表せ。

＜ '00 京都大 ＞

【戦略 1】

まずは，見た目通りベクトルの問題として処理していきます。

その際，本問において，△ABC の大きさは結果に影響しません。

つまり，形だけが問題になります。

サイズが関係ないなら，考えやすいサイズ（ここでは 1 辺の長さが 1 の正三角形）で考えていくことにしましょう。

線分 AP と BC の交点を Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と容易に表せることから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を伸ばして $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を得る方向性で考えていきます。

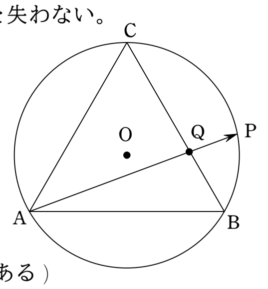
この倍率 k をどのように特定するかですが，

点 P がこの円に乗っかるような上手い倍率 k

と捉えて，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=$ 半径 という条件（方程式）から k を特定します。

【解 1】

1 辺の長さが 1 の正三角形としても一般性を失わない。



線分 AP，BC の交点を Q とする。

条件（ロ）より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

（∵ 外接円の中心 O は △ABC の重心でもある）

この外接円の半径 R について，△ABC で正弦定理を用いると

$\dfrac{1}{\sin 60^\circ}=2R$ で，$R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-p)k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pk\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=\dfrac{1}{3}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}+|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=\frac{1}{3}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=0 \cdots (*) \quad \left(\because |\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=R=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ に注意すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2&=\left|(1-p)k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pk\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=(1-p)^2k^2+p^2k^2+2pk^2(1-p)\cdot\frac{1}{2}\\&=k^2(p^2-p+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}&=\left\{(1-p)k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pk\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\\&=\frac{1}{3}\left\{(1-p)k+\frac{(1-p)k}{2}+\frac{pk}{2}+pk\right\}\\&=\frac{k}{2}\end{aligned}$$

よって，これらを (*) に代入して，$k^2(p^2-p+1)-2\cdot\dfrac{k}{2}=0$

$k=0$ とすると，P は A と一致してしまうので，$k\fallingdotseq 0$

ゆえに，$k(p^2-p+1)-1=0$ で，$k=\dfrac{1}{p^2-p+1}$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{p^2-p+1}\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdots 答$$

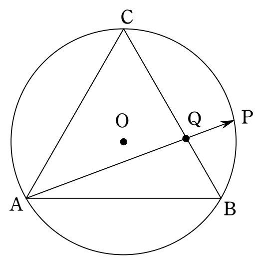
【戦略 2】

【戦略 1】と同様に $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ として，この倍率 k を特定していく方針は変わりませんが，この倍率 k（P がこの円上にのるような上手い倍率 k）を求める際の翻訳の仕方を幾何的に捉えてみます。

点 P がこの円上にあることの幾何的な翻訳は様々あるでしょうが，AQ の長さが余弦定理で求まることを考えると，方べきの定理で QP の長さを求められそうですから，これで欲しい倍率が求まりそうです。

【解 2】

1 辺の長さが 1 の正三角形としても一般性を失わない。



$\triangle$ABQ で余弦定理を用いて $\mathrm{AQ}^2=1^2+p^2-2\cdot1\cdot p\cdot\cos60^\circ$
$=1-p+p^2$

よって，$\mathrm{AQ}=\sqrt{1-p+p^2}$

方べきの定理より，$\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{CQ}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{QP}$

ゆえに，$p(1-p)=\sqrt{1-p+p^2}\cdot\mathrm{QP}$ で，$\mathrm{QP}=\dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$ を得る。

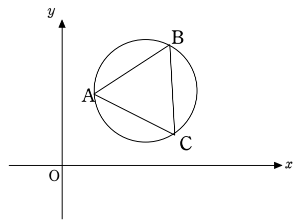
$$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}+\mathrm{QP}=\sqrt{1-p+p^2}+\frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ}}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{1-p+p^2}\left\{(1-p)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdots\text{答}$$

【戦略 3】

座標を考えてみます。



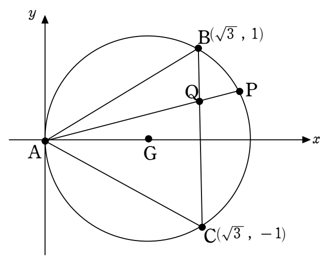
座標を設定するときの注意は
「上手く」設定することで，
右図のように闇雲に設定しても
自分で自分の首を絞めるだけです。

普通は，円の中心を原点に設定することが多いですが，今回は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ という主役のベクトルの始点が A なので，A を原点にとって考えると都合がよさそうです。

また，$\triangle$ABC のサイズは一辺の長さが 2 と設定すると，無駄な分数を回避できますね。

【解 3】

一辺の長さを 2 としても一般性を失わない。



図のように座標を設定する。

円の中心を G とすると，G は $\triangle$ABC の重心なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\0\end{pmatrix}$$

よって，この円は中心 $\mathrm{G}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\,0\right)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ の円なので

$$\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{3}\cdots(*)$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-p)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$=(1-p)\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1-2p\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}k\\(1-2p)k\end{pmatrix}$ で，$\mathrm{P}(\sqrt{3}k,\,(1-2p)k)$

P は $(*)$ 上の点なので，$\left(\sqrt{3}k-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(1-2p)^2k^2=\dfrac{4}{3}$

整理すると $(4p^2-4p+4)k^2-4k=0$

$k=0$ とすると，P は A と一致するので，$k\neq0$

ゆえに $(p^2-p+1)k-1=0$，すなわち $k=\dfrac{1}{p^2-p+1}$ を得る。

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{p^2-p+1}\left\{(1-p)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdots\text{答}$$

【総括】

見た目がベクトルの問題でも，最短の解法がベクトルとは限りません。

幾何，座標，ベクトル，（複素数平面）

は相互に行き来できるようにしましょう。

どの分野のまな板の上で料理するかは，トップレベルになればなるほど重要なテーマでしょう。

また，本問は好きなサイズで考えてもよいことを見抜きましょう。
別に一辺の長さを a としてもいいですが，計算が大変になる上に，どうせ約分されて消えてしまいます。

大変な思いをして計算して，「あ～無駄だった」と気づくのはもったいないことです。

本問の結果は「形のみに左右される」ことは最初から分かっていたのですから。