定数 $c\ (c \neq 0)$ に対して，等式 $f(x+c)=f(x)$ がすべての x について成り立つとき，関数 $f(x)$ は周期関数であるといい，またこの等式を満たすような正の数 c のうちの最小値を $f(x)$ の周期という。

次の関数は周期関数であるか否かを，理由をつけて答えよ。また，周期関数である場合には，その周期を求めよ。

(1)　$f(x)=\sin(\sin x)$

(2)　$f(x)=\cos(\sin x)$

(3)　$f(x)=\sin(x^3)$

(4)　$f(x)=2^{\sin x}$

＜ '84 京都大 ＞

【戦略】

(1)　**周期 2π の周期関数であることは直感的に見つけられるかもしれませんが，それが最小であることをどのように言うかが問題です。**

$f(x+c)=f(x)$ **が成り立つとき，** $\sin(\sin(x+c))=\sin(\sin x)$ **です。**

中身である $\sin(x+c)$，$\sin x$ **は共に** $\begin{cases} |\sin(x+c)| \leqq 1 < \dfrac{\pi}{2} \\ |\sin x| \leqq 1 < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ **を満たしますから，中身比べができて，** $\sin(x+c)=\sin x$ **と言えます。**

これを満たす c **は** $c=2n\pi$ (n：**整数**) **であり，** c **の正の最小値は** $c=2\pi$ **ということになります。**

(2)　**今度は周期 π であることが分かるでしょう。**

これも最小であることをどのように言うかが問題であり，
$f(x+c)=f(x)$ **を紐解いて行く必要があります。**

今回は $\cos(\sin(x+c))=\cos(\sin x)$ **ですが，単純に中身比べができません。**

そこで，全称命題と捉えて， $x=0$ **でも成り立つよねという必要条件を考えていきます。**

これにより， $\cos(\sin c)=1$ **であり，** $\sin c=2m\pi$ **という関係式を得るわけですが，** $-1 \leqq \sin c \leqq 1$ **ですから，** $-1 \leqq 2m\pi \leqq 1$ **ということになり，これを満たす整数** m **は** $m=0$ **となるしかありません。**

よって， $\sin c=0$ **となり，** $c=n\pi$ **を得て，これを満たす最小の正の** c **は** $c=\pi$ **ということになるわけです。**

(3)　**例題で学んだように，今度は周期関数ではありません。**

背理法によって，矛盾を狙っていきますが，狙い筋としては例題同様両辺微分することです。

$\sin(x+c)^3=\sin(x^3)$ **の両辺を微分することで**

$$\cos(x+c)^3 \cdot 3(x+c)^2=\cos(x^3) \cdot 3x^2$$

という関係式を得ます。

例題は $0 \leqq x \leqq p$ **で有限確定すれば，全実数の範囲で有限確定するという誘導がついていましたが，ここではその誘導がないため，**
(2) **同様全称命題と捉えて，** $x=0$ **でも成り立つよねという必要条件を考えていきます。**

これにより， $\sin(c^3)=0$，$\cos(c^3)=0$ **を得るわけですが，**
$\sin(c^3)$，$\cos(c^3)$ **が同時に** 0 **とはならないため，矛盾します。**
もちろん根拠は $\sin^2(c^3)+\cos^2(c^3)=1$ **です。**

(4)　**周期 2π であることが分かりますから，** (1)，(2) **同様** $f(x+c)=f(x)$ **について紐解いていきます。**

$2^{\sin(x+c)}=2^{\sin x}$ **で，指数関数であれば，指数比べができますから**
$\sin(x+c)=\sin x$ **と即座に得られ，** $c=2n\pi$ **を得ます。**

この中で正の最小の c **は** $c=2\pi$ **と得られ，解決します。**

【解答】

(1)　$f(x+2\pi)=\sin(\sin(x+2\pi))$
$=\sin(\sin x)$
$=f(x)$

また，$f(x+c)=f(x)$ が任意の x に対して成立するとき，

$$\sin(\sin(x+c))=\sin(\sin x) \cdots ①$$

一般に $|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin\theta$ は単調増加であるため，

$|\alpha|<\dfrac{\pi}{2}$，$|\beta|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす α，β に対して $\sin\alpha=\sin\beta$ が成り立つとき，$\alpha=\beta$ である。

今，$|\sin(x+c)| \leqq 1 < \dfrac{\pi}{2}$，$|\sin x| \leqq 1 < \dfrac{\pi}{2}$ であることから
① が成り立つとき，$\sin(x+c)=\sin x$ であり，これが任意の x で成り立つような最小の正の数 c は $c=2\pi$

ゆえに，$f(x)=\sin(\sin x)$ は周期 2π の周期関数である。

(2)　$f(x+\pi)=\cos(\sin(x+\pi))$
$=\cos(-\sin x)$
$=\cos(\sin x)$
$=f(x)$

また，$f(x+c)=f(x)$ が任意の x に対して成立するとき，

$$\cos(\sin(x+c))=\cos(\sin x)$$

特に $x=0$ でも成立するので，$\cos(\sin c)=1$

ゆえに，$\sin c=2m\pi$ となる。

$|\sin c| \leqq 1$ であるため，$|2m\pi| \leqq 1$ が成り立つ。

これを満たす整数 m は $m=0$

したがって，$\sin c=0$ となり，$c=n\pi$ (n は整数) となる。

これを満たす最小の正の数 c は $c=\pi$

以上から，$f(x)=\cos(\sin x)$ は周期 π の周期関数である。

© MathClinic

(3)　$f(x)=\sin(x^3)$ が周期関数であると仮定する。

このとき，任意の x に対して，$\sin(x+c)^3=\sin(x^3)$ …(*) となる $c\ (\fallingdotseq 0)$ が存在する。

(*) は特に $x=0$ でも成立するので，$\sin(c^3)=0$ …②

また，(*) の両辺 x で微分すると
$$\cos(x+c)^3\cdot 3(x+c)^2=\cos(x^3)\cdot 3x^2 \quad \cdots(**)$$

(**) は特に $x=0$ でも成立するので，$\cos(c^3)\cdot 3c^2=0$

$c\fallingdotseq 0$ であるため，$\cos(c^3)=0$ …③

②，③ の結果は $\sin^2(c^3)+\cos^2(c^3)=1$ の結果に矛盾する。

以上から，$f(x)=\sin(x^3)$ は周期関数ではない。

(4)　$f(x+2\pi)=2^{\sin(x+2\pi)}$
$=2^{\sin x}$
$=f(x)$

また，$f(x+c)=f(x)$ が任意の x に対して成立するとき
$$2^{\sin(x+c)}=2^{\sin x}$$

一般に $y=2^x$ は x についての単調増加関数であるため，
$\sin(x+c)=\sin x$ であり，これが任意の x で成り立つような最小の正の数 c は $c=2\pi$

以上から，$f(x)=2^{\sin x}$ は周期 2π の周期関数である。

【総括】

誘導がないため，素の力が出来不出来に直結するでしょう。

特に (3) は例題をやった直後であれば捌けるでしょうが，緊張した試験場で突然ポンと出題されたときにスムーズに手が動くかどうかを想定してみてください。

例題のように

> $f(x)=\sin(x^3)$ に対して，$f(x)$ が周期関数と仮定する。
>
> このとき，$f(x+c)=f(x)$ となる $c\ (\fallingdotseq 0)$ が存在し，両辺 x で微分すると，$f'(x+c)=f(x)$ であるため，$f'(x)=3x^2\cos(x^3)$ も周期関数である。
>
> また，周期関数 $f'(x)$ は $0\leqq x\leqq c$ で $|f'(x)|\leqq M$ (M は有限確定値) であるため，全ての x に対して $|f'(x)|\leqq M$ …(☆)
>
> しかし，$a_n=\sqrt[3]{2n\pi}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対して
> $$f'(a_n)=3(2n\pi)^{\frac{2}{3}}\cos(2n\pi)$$
> $$=3(2n\pi)^{\frac{2}{3}}$$
>
> (☆) より，$\lim_{n\to\infty}|f'(a_n)|\leqq M$ であるが，$\lim_{n\to\infty}|f'(a_n)|=\infty$ であり矛盾する。

という流れでもよいでしょうが，ノーヒントでは中々厳しいものがあるでしょう。

© MathClinic