関数 $f(x)$ が正の定数 p により，$f(x+p)=f(x)$ となるとき，$f(x)$ は p を周期とする周期関数という。

(1) $\sin(\sqrt{2}x)$ の周期を求めよ。

(2) 全実数を定義域とする関数 $y=f(x)$ が p を周期とする周期関数であり，さらに定数 M により $|f(x)|\leqq M$ $(0\leqq x\leqq p)$ となっていれば，すべての実数 x について $|f(x)|\leqq M$ となることを示せ。

(3) (2) の $f(x)$ について，さらに $f(x)$ が微分可能であれば，導関数 $f'(x)$ も周期 p の周期関数であることを示せ。

(4) $\sin(x^2)$ は周期関数ではないことを示せ。

＜ '99 山梨大 ＞

【戦略】

(1) **$\sin x$ の基本周期が 2π です。**

$\sin ax$ $(a>0)$ は角速度が a 倍になるということであり，1 周するのに要する時間 (周期) は $\dfrac{1}{a}$ 倍となります。

つまり，$\sin ax$ $(a>0)$ の基本周期は $2\pi\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{2\pi}{a}$ です。

これを考えると，$\sin(\sqrt{2}x)$ の周期は $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$ となります。

ここでは定義に従って，$f(x)=\sin(\sqrt{2}x)$ に対して

$$f(x+\sqrt{2}\pi)=f(x)$$

であることを示せばよいでしょう。

(2) **任意の実数 x は $x=np+r$ (n は整数，$0\leqq r<p$) という形で表せます。**
(厳密には商と余りとは呼びませんが，それに近い感覚です。)

周期が p であれば，$f(np+r)=f(r)$ ですから，任意の x は

$$f(x)=f(r)$$

と表せ，$0\leqq x\leqq p$ の範囲の値である $f(r)$ まで落とし込むことができるわけです。

(3) **微分可能性が保証されているのであれば，$f(x+p)=f(x)$ の両辺を x で微分してしまえば，$f'(x+p)=f'(x)$ ということが成り立つので即座に証明完了です。**

(4) **(2) や (3) を誘導と見るのであれば，背理法で $f(x)=\sin(x^2)$ が周期関数と仮定して (2)，(3) の結果に矛盾するという方向性を睨むでしょう。**

ひとまず，(3) の「微分しても周期関数」という結果を用いると

$f'(x)=2x\cos(x^2)$ も周期関数ということになります。

ところがこれは $x\to\infty$ のとき発散してしまい，(2) の有限確定性に反する結果となります。

意外と $\pm$ の議論が鬱陶しいので，解答では $\cos x^2$ が 1 となるように，$\sqrt{2n\pi}$ に注目して記述しいきます。

【解答】

(1)
$$\sin(\sqrt{2}x)=\sin(\sqrt{2}x+2\pi)$$
$$=\sin\{\sqrt{2}(x+\sqrt{2}\pi)\}$$

つまり，$f(x)=\sin(\sqrt{2}x)$ とすると，$f(x+\sqrt{2}\pi)=f(x)$ より $f(x)$，すなわち $\sin(\sqrt{2}x)$ の周期は $\sqrt{2}\pi$ …答

(2) 任意の実数 x は

$$x=np+r\ (n \text{ は整数},\ 0\leqq r<p)$$

と表すことができる。

$f(x)$ は周期 p の周期関数であるため，整数 n に対して

$$f(np+r)=f(r)$$

ゆえに，任意の実数 x に対して，$|f(x)|=|f(r)|\leqq M$ が成り立ち，題意は示された。

(3) $f(x)$ が微分可能であるため，$f(x+p)=f(x)$ の両辺を x で微分し

$$f'(x+p)=f'(x)$$

ゆえに，$f'(x)$ も周期 p の周期関数である。

(4) $f(x)=\sin(x^2)$ が周期関数であると仮定する。

すると，(3) より，$f'(x)=2x\cos(x^2)$ も周期関数である。

ここで，$a_n=\sqrt{2n\pi}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$f'(a_n)=2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi$$
$$=2\sqrt{2n\pi}\quad\cdots①$$

今，$0\leqq x\leqq p$ という範囲で $|f'(x)|\leqq M$ (＝有限確定値) であるため (2) の結果から全ての x に対して $|f'(x)|\leqq M$ と言える。

したがって，$\lim_{n\to\infty}|f'(a_n)|\leqq M$ ということになるが，① より $\lim_{n\to\infty}|f'(a_n)|=\infty$ であるため，矛盾する。

以上から，$f(x)=\sin(x^2)$ は周期関数ではない。

【総括】

(2) は当たり前に感じるかもしれませんが，当たり前のことを言語化する点においては決して簡単ではないでしょう。

なお，$f'(x)$ は $0\leqq x\leqq p$ という閉区間で連続であるため，最大値・最小値が存在し $|f'(x)|\leqq M$ ということは自明のものとして扱いましたが，このあたりは大学以降の数学ではセンシティブに扱われる話題です。

また，(4) の結果は「 sin の服を着ていれば周期関数だろう」という乱暴な考え方の人からすると意外な結果に思えたかもしれません。