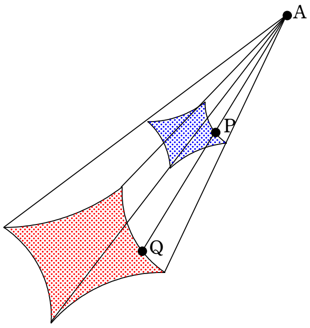
座標空間内の平面 $z=1$ 上に曲線 $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で囲まれた図形 D がある。 $h>1$ として，点 (a, b, h) より図形 D に光をあてるとき，平面 $z=0$ 上に写る D の影を D' とする。

このとき，D' の周囲の長さを求めよ。

＜ '99 お茶の水女子大 ＞

【戦略】

図形 D の境界線を C，図形 D' の境界線を C' として，C 上のある 1 点 P に注目し，点 P に光が当たったときを考えます。



この図のように P に対応する Q を捉え，P が C 上を動いたときの Q の軌跡が C' というように捉えればよいでしょう。

$\mathrm{P}(x, y, 1)$ に対して，$\mathrm{Q}(X, Y, 0)$ が対応したとすれば，目標は X，Y が満たす条件式を Get することです。

(x , y には $\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$ という関係式があります。)

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を伸ばして $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を得る方向性を考えますが，この t は Q が平面 $z=0$ に乗るような「うまい倍率」です。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\begin{pmatrix}(x-a)t+a\\(y-b)t+b\\(1-h)t+h\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ですから，z 成分が 0 であることより，$(1-h)t+h=0$，すなわち

$$t=\frac{h}{h-1}$$

を得ます。

これにより， $\begin{cases} X=(x-a)\cdot\dfrac{h}{h-1}+a=\dfrac{h}{h-1}x-\dfrac{1}{h-1}a \\ Y=(y-b)\cdot\dfrac{h}{h-1}+b=\dfrac{h}{h-1}y-\dfrac{1}{h-1}b \end{cases}$

となり，

$$\begin{cases} X=\dfrac{h}{h-1}\cos^3\theta-\dfrac{1}{h-1}a \\ Y=\dfrac{h}{h-1}\sin^3\theta-\dfrac{1}{h-1}b \end{cases}$$

と，Q の軌跡である C' のパラメータ表示が得られました。

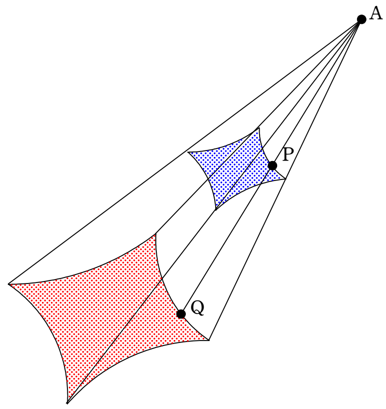
あとは，パラメータ表示された曲線の長さの公式

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

を用いて捌いていけばよいでしょう。

【解答】

点 $\mathrm{A}(a, b, h)$ とし，D の境界線 C 上の点 $\mathrm{P}(x, y, 1)$ に点 A から光を当てたときの $z=0$ 上にできる影が表す点を $\mathrm{Q}(X, Y, 0)$ とする。



直線 AP 上の点 Q は実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

と表せ，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}X\\Y\\0\end{pmatrix}&=(1-t)\begin{pmatrix}a\\b\\h\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(x-a)t+a\\(y-b)t+b\\(1-h)t+h\end{pmatrix}\end{aligned}$$

z 成分に注目すると，$(1-h)t+h=0$，すなわち $t=\dfrac{h}{h-1}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}X&=(x-a)\cdot\frac{h}{h-1}+a\\&=\frac{h}{h-1}x-\frac{1}{h-1}a\end{aligned}\qquad\begin{aligned}Y&=(y-b)\cdot\frac{h}{h-1}+b\\&=\frac{h}{h-1}y-\frac{1}{h-1}b\end{aligned}$$

つまり，C 上の点 $\mathrm{P}(x, y, 1)$ を動かしたとき， $\mathrm{Q}(X, Y, 0)$ の軌跡が表す曲線 C' は平面 $z=0$ 上で

$$\begin{cases} X=\dfrac{h}{h-1}\cos^3\theta-\dfrac{1}{h-1}a \\ Y=\dfrac{h}{h-1}\sin^3\theta-\dfrac{1}{h-1}b \end{cases}$$

というパラメータ表示で与えられる。

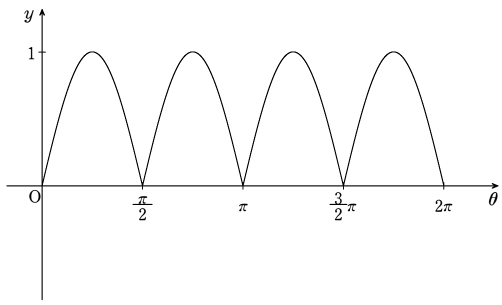
$$\frac{dX}{d\theta}=\frac{h}{h-1}(-3\cos^2\theta\sin\theta),\quad \frac{dY}{d\theta}=\frac{h}{h-1}(3\sin^2\theta\cos\theta)$$

よって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2&=\left(\frac{h}{h-1}\right)^2\{9\cos^4\theta\sin^2\theta+9\sin^4\theta\cos^2\theta\}\\&=\left(\frac{h}{h-1}\right)^2\{9\sin^2\theta\cos^2\theta\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\}\\&=\left(\frac{h}{h-1}\right)^2(9\sin^2\theta\cos^2\theta)\end{aligned}$$

求める D' の周囲の長さを L とすると

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{h}{h-1}\cdot 3|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta$$
$$=\frac{3h}{2(h-1)}\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|\,d\theta$$



$y=|\sin 2\theta|$ の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲におけるグラフは上の図のようになり

$$\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-2\Big[\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-2(-1-1)$$
$$=4$$

ゆえに，

$$L=\frac{3h}{2(h-1)}\cdot 4$$
$$=\frac{6h}{h-1}\quad\cdots 答$$

【総括】

アステロイドと呼ばれる有名曲線の射影を考えるという題材です。

空間座標における直線はベクトル方程式で表す

という基本を運用しています。

Q は線分 AP を $h:1$ に外分する点であると捉え

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+h\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{h-1}=-\frac{1}{h-1}\begin{pmatrix}a\\b\\h\end{pmatrix}+\frac{h}{h-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{h}{h-1}x-\frac{1}{h-1}a\\\frac{h}{h-1}y-\frac{1}{h-1}b\\0\end{pmatrix}$$

と出してもよいでしょう。

さらに，この路線の場合，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{h}{h-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{h-1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と見ると

C' は C を $\frac{h}{h-1}$ 倍に相似拡大して，$-\frac{1}{h-1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向に平行移動したものと考えることができます。

これにより，C の周囲の長さを

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=3\int_0^{2\pi}|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=6$$

と計算し，これを $\frac{h}{h-1}$ 倍して C' の周囲の長さは $\frac{6h}{h-1}$ と求めてもよいでしょう。