次の各問に答えなさい。

(1) $x>0$ のとき，1 より大きい自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(1+x)^n \geqq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 1 より大きい自然数 n について，$(1+n)^{\frac{1}{n}}=1+a_n$ とするとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$1 \geqq a_n+\frac{n-1}{2}a_n{}^2$$

(3) (2) の結果を用いて，次の極限値を求めなさい。

$$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

＜ '93 神戸大 ＞

【戦略】

(1) **例題と同じですが，$n \geqq 2$ のときという指定があるため，$n=1$ のときは考えなくてもよくなります。**

(2) $1+n=(1+a_n)^n$ **と見て，**$(1+a_n)^n$ **という形で** (1) **の評価を用いることを考えます。**

(3) $a_n>0$ **であることから，**$a_n+\frac{n-1}{2}a_n{}^2>\frac{n-1}{2}a_n{}^2$ **と**

(2) **の不等式はさらに評価でき，**$1>\frac{n-1}{2}a_n{}^2$ **を得ます。**

これより，$a_n{}^2<\frac{2}{n-1}$ **となり，**$a_n>0$ **も考えると**

$$0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

を得ますから，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ **となります。**

よって，$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1$ **となり解決です。**

【解答】

(1) $n \geqq 2$ のとき二項定理より

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= {}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n\\ &\geqq {}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2 \quad (\because\ a>0)\\ &=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2) $(1+n)^{\frac{1}{n}}=1+a_n$ とおくとき，$1+n=(1+a_n)^n$ …① である。

2 以上の整数 n に対して，$(1+n)^{\frac{1}{n}}>1$ であるため，

$$a_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}-1>0 \quad \cdots②$$

ゆえに，(1) より，$(1+a_n)^n \geqq 1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n{}^2$

① より (左辺)$=1+n$ であるから，

$$1+n \geqq 1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n{}^2$$

よって，$n \geqq na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n{}^2$

$n \geqq 2$ であるから，両辺を $n\ (>0)$ で割ると

$$1 \geqq a_n+\frac{n-1}{2}a_n{}^2$$

を得て，題意の不等式が示された。

(3) (2) より，$1 \geqq a_n+\frac{n-1}{2}a_n{}^2>\frac{n-1}{2}a_n{}^2\ (\because\ a_n>0)$

これより，$a_n{}^2<\frac{2}{n-1}$ を得て，$a_n>0$ も考えると

$$0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$ であり，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}(1+a_n)\\&=1 \quad \cdots 答\end{aligned}$$

【戦略 2】(1) について

二項定理が見えなかった場合は，数学的帰納法で示すこともできます。

【解 2】(1) について

$x>0$，n が 2 以上の整数のとき

$$(1+x)^n \geqq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \cdots (*)$$

が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示す。

[1]　$n=2$ のとき

$(\text{左辺})=(1+x)^2=x^2+2x+1$

$(\text{右辺})=1+2x+\dfrac{2\cdot 1}{2}x^2=x^2+2x+1$

より，$(*)$ は成立する。

[2]　$n=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$(1+x)^k \geqq 1+kx+\dfrac{k(k-1)}{2}x^2$ が成り立つと仮定する。

このとき，両辺に $1+x\ (>0)$ をかけると

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geqq \left\{1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2\right\}(1+x)\\ &=1+x+kx+kx^2+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)}{2}x^3\\ &=1+(k+1)x+\frac{k(k+1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)}{2}x^3\\ &\geqq 1+(k+1)x+\frac{k(k+1)}{2}x^2 \quad (\because\ x>0)\end{aligned}$$

これより，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ。

[1], [2] から，$x>0$，n が 2 以上の自然数のとき

$$(1+x)^n \geqq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が成り立つ。

【総括】

二項定理のケツカット評価からのはさみうちの原理というシナリオは例題同様です。

また，例題同様

$$\lim_{n\to\infty}\log(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$$

ということを認めれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$ という結論は見えてしまいます。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$ の証明

（※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ は例題の【総括】で解説済みなので，結果を認める）

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n} &=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log n}{n}\cdot\frac{\log(n+1)}{\log n}\right\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log n}{n}\cdot\frac{\log n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log n}{n}\cdot\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log n}{n}\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)\right\}\\ &=0\cdot 1\\ &=0\end{aligned}$$

◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇ 参考 ◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

今回は，二項定理

$$(1+x)^n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

の ${}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$ をカットして評価しましたが，

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \\ &\geqq 1 + {}_n\mathrm{C}_1 x\end{aligned}$$

と評価し，

$$(1+x)^n \geqq 1 + nx \quad (x \geqq 0\,,\ n：\text{自然数})$$

という不等式を得るのもよくやります。

二項定理のケツカットが使えるよう，$x \geqq 0$ という設定で出題されることが多いですが，実は，$x \geqq -1$ に対しても

$$(1+x)^n \geqq 1 + nx \quad (n = 1\,,\ 2\,,\ \cdots) \cdots (☆)$$

が成り立ち，ベルヌーイの不等式と呼ばれます。

$x \geqq -1$ となると，単純に二項定理のカット作戦は使えず，帰納法，もしくは直接差を取る方法で示すことになります。

【証明 1：数学的帰納法】

[1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=(1+x)^1 = 1+x$ ，(右辺)$=1+1\cdot x = 1+x$

より，(☆) は成立する。

[2]　$n=k$ $(k=1\,,\ 2\,,\ \cdots)$ のとき

$(1+x)^k \geqq 1+kx$ が成り立つと仮定する。

両辺に $1+x\ (\geqq 0)$ をかけると

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geqq (1+kx)(1+x) \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &> 1+(k+1)x\end{aligned}$$

となり，(☆) は $n=k+1$ のときも正しい。

[1]，[2] より，$x \geqq -1$ のとき，自然数 n に対して，$(1+x)^n \geqq 1+nx$

なお，ベルヌーイの不等式は帰納法だけでなく，直接証明することもできます。

決め手は $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$ という因数分解です。

【証明 2：差を取る直接的路線】

$X \geqq 0$ のとき，自然数 n に対して

$$X^n \geqq nX - (n-1)$$

が成り立つことを証明する。

$$\begin{aligned}X^n - \{nX-(n-1)\} &= X^n - (nX - n + 1) \\ &= (X^n - 1) - n(X-1) \\ &= (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1) - n(X-1) \\ &= (X-1)\{X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 - n\} \\ &= (X-1)\{(X^{n-1}-1) + (X^{n-2}-1) + \cdots + (X-1)\} \\ &= (X-1)^2\{(X^{n-2} + \cdots + 1) + (X^{n-3} + \cdots + 1) + \cdots + 1\} \\ &\geqq 0\end{aligned}$$

これより，$X^n \geqq nX - (n-1)$

ここで，$X = 1+x$ とおくと，$X \geqq 0$ のとき，$x \geqq -1$ であり，

$$(1+x)^n \geqq n(1+x) - (n-1)$$

すなわち，$x \geqq -1$ のとき，自然数 n に対して

$$(1+x)^n \geqq 1+nx$$

が成立する。