次の (1)，(2)，(3) に答えよ。

(1) $a>0$，n が自然数のとき

$$(1+a)^n \geqq 1+na+\frac{1}{2}n(n-1)a^2$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 2 以上の自然数 n に対して，$\sqrt[n]{n}=1+a_n$ とおくとき，

$$0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ を求めよ。

＜ ’85 鹿児島大 ＞

【戦略 1】

(1) **右辺の形を $1+{}_n\mathrm{C}_1 a+{}_n\mathrm{C}_2 a^2$ と看破できれば，二項定理をインスピレーションできるのですが，経験に左右されやすい一発路線です。**

二項定理の ${}_n\mathrm{C}_3 a^3$ 以降をカットすることを考えるわけですが，そもそも ${}_n\mathrm{C}_3 a^3$ 以降の項があるのは $n>2$ のときであることから $n=1$ のときは別にして考える必要があります。

(2) $n=(1+a_n)^n$ **と見て，**$(1+\square)^n$ **の形を評価する** (1) **の活用を見込みたくなります。**

$n=(1+a_n)^n \geqq 1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1){a_n}^2$ **なのですが，さらに** na_n **もカットしてやると**

$n>1+\frac{1}{2}n(n-1){a_n}^2$ **で，移項すれば，**$n-1>\frac{1}{2}n(n-1){a_n}^2$ **と** $n-1$ **が約分できることになり，手なりに解決します。**

(3) (2) **の不等式，及びはさみうちの原理から，**$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ **が得られるのは即座に見抜けるでしょう。**

つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$ **ですから，**$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ **と即解決します。**

【解答】

(1) $n\geqq 2$ のとき二項定理より

$$\begin{aligned}(1+a)^n &= {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1 a+{}_n\mathrm{C}_2 a^2+{}_n\mathrm{C}_3 a^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n a^n\\ &\geqq {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1 a+{}_n\mathrm{C}_2 a^2 \quad (\because\ a>0)\\ &=1+na+\frac{1}{2}n(n-1)a^2\end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$(1+a)^1=1+1\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-1)a^2$ が成り立つ。

ゆえに，$a>0$，及び $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$(1+a)^n \geqq 1+na+\frac{1}{2}n(n-1)a^2$$

が成り立つ。

(2) $\sqrt[n]{n}=1+a_n$ とおくとき，$n=(1+a_n)^n$ …① である。

2 以上の整数 n に対して，$\sqrt[n]{n}>1$ であるため，

$$a_n=\sqrt[n]{n}-1>0 \ \cdots②$$

ゆえに，(1) より，$(1+a_n)^n \geqq 1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1){a_n}^2$

① より (左辺)$=n$ であるから，

$$\begin{aligned}n &\geqq 1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1){a_n}^2\\ &>1+\frac{1}{2}n(n-1){a_n}^2\end{aligned}$$

よって，$n-1>\frac{1}{2}n(n-1){a_n}^2$

$n\geqq 2$ であるから，両辺を $n-1\ (>0)$ で割ると

$1>\frac{1}{2}n{a_n}^2$，すなわち ${a_n}^2<\frac{2}{n}$ を得る。

② より，$0<{a_n}^2<\frac{2}{n}$，すなわち $0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$ が成り立つ。

(3) (2) より，$0<\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n}}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}=0$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ …答

【戦略 2】(1) について

二項定理が見えなかった場合は，数学的帰納法で示すこともできます。

【解 2】(1) について

$a>0$，n が自然数のとき

$$(1+a)^n \geqq 1+na+\frac{1}{2}n(n-1)a^2 \quad \cdots (*)$$

が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=(1+a)^1=1+a$

(右辺)$=1+1\cdot a+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 0\cdot a^2=1+a$

より，$(*)$ は成立する。

[2]　$n=k$ $(k=1，2，\cdots)$ のとき

$(1+a)^k \geqq 1+ka+\dfrac{1}{2}k(k-1)a^2$ が成り立つと仮定する。

このとき，両辺に $1+a$ (>0) をかけると

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &\geqq \left\{1+ka+\frac{1}{2}k(k-1)a^2\right\}(1+a)\\ &=1+a+ka+ka^2+\frac{k(k-1)}{2}a^2+\frac{k(k-1)}{2}a^3\\ &=1+(k+1)a+\frac{k(k+1)}{2}a^2+\frac{k(k-1)}{2}a^3\\ &\geqq 1+(k+1)a+\frac{k(k+1)}{2}a^2 \quad (\because\ a>0)\end{aligned}$$

これより，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ。

[1]，[2] から，$a>0$，n が自然数のとき

$$(1+a)^n \geqq 1+na+\frac{1}{2}n(n-1)a^2$$

が成り立つ。

【総括】

丁寧な誘導がついていたため，完答も現実的です。

(1) の二項定理のケツカットは頻出の考え方なので会得しておきましょう。

なお，n と $\log n$ の発散速度を考えれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ ということが言えます。

これを認めてしまえば，$x_n=\sqrt[n]{n}\ \left(=n^{\frac{1}{n}}\right)$ に対し，$\log x_n=\dfrac{1}{n}\log n$ ですから，

$$\lim_{n\to\infty}\log x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

であり，$\log x$ は連続関数であることから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

が得られます。

このことから，結論自体を予想することは難しくありません。

なお，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ を証明しようと思うと以下のようになります。

定義域を実数に拡張し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を証明する。

$f(x)=\sqrt{x}-\log x$ $(x\geqq 1)$ とする。

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ より，

x	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2-\log 4$	↗

という増減表を得る。

ゆえに，$x\geqq 1$ で，$f(x)\geqq f(4)=\log e^2-\log 4>0$

つまり，$x\geqq 1$ で，$\log x<\sqrt{x}$

以上から，$x\geqq 1$ で，$0<\log x<\sqrt{x}$ が成り立ち，両辺 x で割ると

$$0<\frac{\log x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

を得て，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ で，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$