三角形 ABC において

$$a=\mathrm{BC}\,,\ b=\mathrm{CA}\,,\ c=\mathrm{AB}$$

と表す。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\tan A}{a^2}=\dfrac{\tan B}{b^2}$ が成り立つ三角形 ABC はどのような三角形か。

(2) $b=\dfrac{a+c}{2}$ が成り立つ三角形 ABC に対し，

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

の値を求めよ。

＜ ’03 横浜国立大 ＞

【戦略 1】

(1) **三角形の形状決定については**

角の情報に統一する or **辺の情報に統一する**

という方針を睨みながら式変形をするのが定石です。

ここでは，正弦定理を用いて， $\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\end{cases}$ **を用いて角度の情報に統一して捌いていきます。**

(2) **例題でも解説した通り，**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

という正弦定理は

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

という連比を意味するため， $a+c=2b$ **から**

$$\sin A+\sin C=2\sin B$$

とすることを目論めます。

ここから， $\sin B=\sin(\pi-(A+C))=\sin(A+C)$

と ∠B を消去することで， $\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$ **となります。**

和積公式，2 倍角の公式で左辺，右辺ともに角 $\dfrac{A+C}{2}$ **が登場することを目論むと**

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

と変形でき， $\sin\dfrac{A+C}{2}$ ($\neq 0$) **で約分できますから**

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$$

となります。

あとは加法定理でバラスと手なりに目標まで辿り着けるでしょう。

【解 1】

(1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$$

であるから，$\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\end{cases}$

$$\frac{\tan A}{a^2}=\frac{\tan B}{b^2}\iff\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}}{4R^2\sin^2 A}=\frac{\dfrac{\sin B}{\cos B}}{4R^2\sin^2 B}$$

$$\iff\frac{1}{4R^2\sin A\cos A}=\frac{1}{4R^2\sin B\cos B}$$

$$\iff\sin A\cos A=\sin B\cos B$$

$$\iff 2\sin A\cos A=2\sin B\cos B$$

$$\iff\sin 2A=\sin 2B$$

$0<A<\pi$，$0<B<\pi$ より，$\begin{cases}0<2A<2\pi\\ 0<2B<2\pi\end{cases}$ であるから

$$2A=2B \text{ または } 2A=\pi-2B$$

すなわち，$A=B$ または $A+B=\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\dfrac{\tan A}{a^2}=\dfrac{\tan B}{b^2}$ を満たす三角形 ABC は

CA＝CB の二等辺三角形 または ∠C$=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形 … 答

(2) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，すなわち $\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$ を得るため

$b=\dfrac{a+c}{2}$，すなわち $2b=a+c$ から，$4R\sin B=2R(\sin A+\sin C)$

よって，

$$\begin{aligned}\sin A+\sin C&=2\sin B\\&=2\sin(\pi-(A+C))\\&=2\sin(A+C)\end{aligned}$$

和積公式，2 倍角の公式より

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$0<A+C<\pi$ であるため，$0<\dfrac{A+C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\dfrac{A+C}{2}\neq 0$

ゆえに，$\cos\dfrac{A-C}{2}=2\cos\dfrac{A+C}{2}$

加法定理から，$\begin{cases} \cos\dfrac{A-C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} \\ \cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} \end{cases}$

よって，

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left\{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}$$

これより，$3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$0<A<\pi$，$0<C<\pi$ なので，$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であり，

$\cos\dfrac{A}{2}\neq 0$，$\cos\dfrac{C}{2}\neq 0$ であるから，両辺 $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ で割ることで

$$3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

すなわち，$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ …答

【戦略 2】(1) について

辺の情報に統一するという方針も考えられます。

【解 2】

(1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$$

よって，$\begin{cases} \sin A=\dfrac{a}{2R} \\ \sin B=\dfrac{b}{2R} \end{cases}$

一方，余弦定理より，$\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \end{cases}$

ゆえに，

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}$$

$$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\dfrac{b}{2R}}{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}=\frac{abc}{R(c^2+a^2-b^2)}$$

これより

$$\frac{\tan A}{a^2}=\frac{bc}{Ra(b^2+c^2-a^2)},\quad \frac{\tan B}{b^2}=\frac{ca}{Rb(c^2+a^2-b^2)}$$

よって，$\dfrac{\tan A}{a^2}=\dfrac{\tan B}{b^2}$ を満たしているとき

$$\frac{bc}{Ra(b^2+c^2-a^2)}=\frac{ca}{Rb(c^2+a^2-b^2)}$$

$\Leftrightarrow\quad \dfrac{b}{a(b^2+c^2-a^2)}=\dfrac{a}{b(c^2+a^2-b^2)}$

$\Leftrightarrow\quad b^2(c^2+a^2-b^2)=a^2(b^2+c^2-a^2)$

$\Leftrightarrow\quad a^4-b^4-(a^2-b^2)c^2=0$

$\Leftrightarrow\quad (a^2+b^2)(a^2-b^2)-(a^2-b^2)c^2=0$

$\Leftrightarrow\quad (a^2-b^2)\{(a^2+b^2)-c^2\}=0$

$\Leftrightarrow\quad (a+b)(a-b)\{(a^2+b^2)-c^2\}=0$

$\Leftrightarrow\quad (a-b)\{(a^2+b^2)-c^2\}=0$　（$\because\ a+b>0$）

ゆえに，$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

したがって，$\dfrac{\tan A}{a^2}=\dfrac{\tan B}{b^2}$ を満たす三角形 ABC は

CA＝CB の二等辺三角形 または ∠C$=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形 …答

【戦略 3】(2) について

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ というターゲットが明確なのであれば，ゴリゴリ計算でも無理ではありません。

$\dfrac{A}{2}$，$\dfrac{C}{2}$ という角度が扱いづらいというのであれば，

$$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\ ,\ \tan^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{1+\cos C}$$

という半角の公式を用いて捌いていけばよいでしょう。

【解 3】(2) について

(2)　余弦定理より $\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\[2mm]\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{cases}$

$$\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1-\cos A}{2}}{\frac{1+\cos A}{2}}\cdot\frac{\frac{1-\cos C}{2}}{\frac{1+\cos C}{2}}$$

$$=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\cdot\frac{1-\cos C}{1+\cos C}$$

$$=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}\cdot\frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab+a^2+b^2-c^2}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}$$

$$=\frac{\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}}\cdot\frac{\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}}{\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}}$$

$$=\frac{(a-b+c)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{b^2}{(3b)^2}\quad\left(\because\ \text{条件}\ b=\frac{a+c}{2}\ \text{より，}\ 2b=a+c\right)$$

$$=\frac{1}{9}$$

$0<A<\pi$，$0<C<\pi$ より，$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であり

$\tan\dfrac{A}{2}>0$，$\tan\dfrac{C}{2}>0$ であるから

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}\ \cdots\text{答}$$

【戦略 4】(2) について

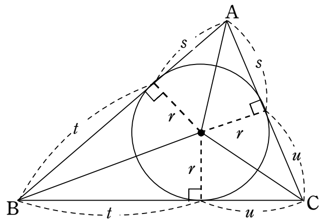
$\tan\dfrac{A}{2}$，$\tan\dfrac{C}{2}$ というものを幾何的に登場させることを考え，

内角の 2 等分線

に注目し，内接円を媒介させて解くことも考えられます。

【解 4】(2) について

(2)　△ABC の内接円の半径を r とし，右図のように s，t，u という長さを定める。



すると，

$$s\tan\frac{A}{2}=t\tan\frac{B}{2}=u\tan\frac{C}{2}=r$$

すなわち，$s=\dfrac{r}{\tan\frac{A}{2}}$，$t=\dfrac{r}{\tan\frac{B}{2}}$，$u=\dfrac{r}{\tan\frac{C}{2}}$ $\cdots$①

$\begin{cases}a=t+u\\ b=u+s\\ c=s+t\end{cases}$ であるため，条件 $b=\dfrac{a+c}{2}$，すなわち $2b=a+c$ より

$2(u+s)=(t+u)+(s+t)$，すなわち $s+u=2t$ $\cdots$②

① を ② に代入すると

$$\frac{r}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{r}{\tan\frac{C}{2}}=\frac{2r}{\tan\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}=\frac{2}{\tan\frac{B}{2}}\quad(\because\ r>0)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}=2\tan\frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{2}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ 1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ を計算するということが明確なのであれば，例題と違って様々なとっかかりが見えてくるでしょう。