△ABCにおいて，∠A，∠B，∠C の大きさと対辺の長さをそれぞれ A，B，C および a，b，c で表す。$a+c=2b$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin A+\sin C=2\sin B$ が成立することを示せ。

(2) $\sin A+\sin C=2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}$ を用いて $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ。

＜ '11 静岡大 一部設問省略 ＞

【戦略】

例題の【解 2】の路線の一部分が訊かれています。

和積公式を利用して導出しろという解法縛りがあり，尚且つ (1) という誘導もあるため，例題よりもやることは明確です。

【解答】

(1) △ABCの外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，すなわち

$$\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$$

である。

よって，条件 $a+c=2b$ から $2R(\sin A+\sin C)=4R\sin B$

したがって，$\sin A+\sin C=2\sin B$ が成り立つ。

(2) $B=\pi-(A+C)$ より，$\sin B=\sin\{\pi-(A+C)\}=\sin(A+C)$

ゆえに，(1) の関係式は $\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$

ここで，

$$(\text{左辺})=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$(\text{右辺})=2\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}=4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

ゆえに，$2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=4\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}$

すなわち，$\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}$

$0<A+C<\pi$ であるため，$0<\dfrac{A+C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\dfrac{A+C}{2}\fallingdotseq 0$

ゆえに，$\cos\dfrac{A-C}{2}=2\cos\dfrac{A+C}{2}$

加法定理から，$\begin{cases} \cos\dfrac{A-C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} \\ \cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} \end{cases}$

よって，

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left\{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}$$

これより，$3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$0<A<\pi$，$0<C<\pi$ なので，$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であり，

$\cos\dfrac{A}{2}\fallingdotseq 0$，$\cos\dfrac{C}{2}\fallingdotseq 0$ であるから，両辺 $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ で割り，

$$3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

すなわち，$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ …答

【総括】

誘導があり，なおかつ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ の導出までで止めても十分入試問題として成り立つことを考えると，これを基に色々考えさせられる例題のキツさが分かると思います。