三角形 ABC において，頂点 A，B，C を見込む角の大きさをそれぞれ A，B，C，頂点 A，B，C に対する対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。また a，b，c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすとする。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　ひとつの角の大きさが $\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(4)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

＜ ’19 東京医科歯科大 ＞

【戦略 1】

長さ a，b，c がこの順に等差数列をなすということを翻訳すると

$$b=\frac{a+c}{2}$$

ということになります。

これより，b を消去できることになりますから，今回考えるべき $\cos A$ を計算すると

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{1}{4}(a+c)^2+(c+a)(c-a)}{c(a+c)}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{a}{c}$$ **です。**

(2)，(3)，(4) **では C の条件もあることから，$\cos C$ も計算しておくと**

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+c)(a-c)+\frac{1}{4}(a+c)^2}{a(a+c)}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{c}{a}$$ **です。**

今回の問題は大きさは関係なく，形（角度）の問題です。

つまり，ここから $\dfrac{c}{a}$ を消去したいと思います。

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{5-4\cos A}{3}$ **より，** $\cos C=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{5-4\cos A}$ **と角度の関係式が出てきますから，これを整理することで**

$$5(\cos C+\cos A)=4(1+\cos C\cos A)\ \cdots(*)$$

を得ます。

(1)　$A=\dfrac{\pi}{3}$ **のときは問題なく** $\cos A=\dfrac{1}{2}$ **です。**

$C=\dfrac{\pi}{3}$ **のときも** $0<a\leqq b\leqq c$ **より** $0<A\leqq B\leqq C$ **で** C **が最大角ということですから，** $A=B=\dfrac{\pi}{3}$ **なので，** $\cos A=\dfrac{1}{2}$ **と即解決です。**

$B=\dfrac{\pi}{3}$ **のときは，** $A+C=\dfrac{2\pi}{3}$ **ということになります。**

$(*)$ **を和積公式，積和公式を用いることで**

$$5\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}=2+\cos(C+A)+\cos(C-A)\cdots(**)$$

というように $C+A$ を登場させて捌けそうです。

(2)　**C が具体的に定まっているため，$(*)$ の方に代入することで，$\cos A$ がダイレクトに求まるでしょう。**

(3)　**これも $(*)$ の方に代入することで**

$$5(\cos 2A+\cos A)=4(1+\cos 2A\cos A)$$

となり，$\cos 2A=2\cos^2 A-1$ という 2 倍角の公式を用いてやることで，$\cos A$ についての 3 次方程式にもちこめる見通しが立ちます。

(4)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ **という条件は，** $C-A=\dfrac{\pi}{3}$ **と見れますから，今度は $(**)$ の方に代入するのがよいでしょう。**

これにより

$$5\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=2+\cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}$$

を得るわけです。

目がチカチカするのであれば， $A+\dfrac{\pi}{6}=\theta$ **などとおいてしまえば**

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{5}{2}+\cos 2\theta$$

となり，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ という 2 倍角の公式で $\cos\theta$ についての 2 次方程式に持ち込める算段がつくでしょう。

【解 1】

a，b，c がこの順に等差数列をなすという条件から，$b=\dfrac{a+c}{2}$ …①

余弦定理から，$\begin{cases} \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} & \cdots② \\ \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} & \cdots③ \end{cases}$

①，② より，$\cos C=\dfrac{(a+c)(a-c)+\frac{1}{4}(a+c)^2}{a(a+c)}$

$=\dfrac{(a-c)+\frac{1}{4}(a+c)}{a}$

$=\dfrac{5a-3c}{4a}$

$=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{c}{a}$ …④

①，③ より，$\cos A=\dfrac{\frac{1}{4}(a+c)^2+(c+a)(c-a)}{c(a+c)}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}(a+c)+(c-a)}{c}$

$=\dfrac{5c-3a}{4c}$

$=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{a}{c}$ …⑤

⑤ より，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{5-4\cos A}{3}$ であり，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5-4\cos A}$

これを ④ に代入し，$\cos C=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{5-4\cos A}$

分母を払って整理すると，

$5(\cos C+\cos A)=4(1+\cos C\cos A)$ …(*)

を得る。

和積公式，積和公式より

$$5\cdot 2\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}=4\left\{1+\frac{1}{2}(\cos(C+A)+\cos(C-A))\right\}$$

すなわち

$$5\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}=2+\cos(C+A)+\cos(C-A)\cdots(**)$$

(1)　$A=\dfrac{\pi}{3}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$ のいずれかが成り立っているときを考える。

[1]　$A=\dfrac{\pi}{3}$ のときは $\cos A=\dfrac{1}{2}$

[2]　$B=\dfrac{\pi}{3}$ のときは，$A+C=\dfrac{2\pi}{3}$ であり，(**) より

$$5\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=2+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2A\right)$$

$$\frac{5}{2}\cos\alpha=\frac{3}{2}+\cos 2\alpha\quad\left(\alpha=\frac{\pi}{3}-A\ \text{とおいた}\right)$$

$$\frac{5}{2}\cos\alpha=\frac{3}{2}+2\cos^2\alpha-1$$

整理すると $4\cos^2\alpha-5\cos\alpha+1=0$

$$(4\cos\alpha-1)(\cos\alpha-1)=0$$

$0<a\leqq b\leqq c$ より，$0<A\leqq B=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ であり，$\dfrac{1}{2}<\cos\alpha\leqq 1$ なので，$\cos\alpha=1$

よって，$\alpha=0$ であり，$\cos A=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

[3]　$C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$A+B=\dfrac{2\pi}{3}$ であり，$0<A\leqq B\leqq\dfrac{\pi}{3}$ であることを考えると

$A+B\leqq B+B$

よって $\dfrac{2\pi}{3}\leqq 2B$，すなわち $B\geqq\dfrac{\pi}{3}$ であるため，$B=\dfrac{\pi}{3}$

このとき $A=\dfrac{\pi}{3}$ であり，$\cos A=\dfrac{1}{2}$

以上 [1]，[2]，[3] から，$\cos A=\dfrac{1}{2}$ …答

(2)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき

(*) より，$5\left(-\dfrac{1}{2}+\cos A\right)=4\left(1-\dfrac{1}{2}\cos A\right)$

これより，$\cos A=\dfrac{13}{14}$ …答

(3)　$C=2A$ のとき

$B=\pi-3A>0$ であるので，$0<A<\dfrac{\pi}{3}$ より，$\dfrac{1}{2}<\cos A<1$

(*) より，$5(\cos 2A+\cos A)=4(1+\cos 2A\cos A)$

$5\{2\cos^2 A-1+\cos A\}=4\{1+\cos A(2\cos^2 A-1)\}$

$$8\cos^3 A-10\cos^2 A-9\cos A+9=0$$

$$(\cos A+1)(8\cos^2 A-18\cos A+9)=0$$

$$(\cos A+1)(4\cos A-3)(2\cos A-3)=0$$

$\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ より，$\cos A=\dfrac{3}{4}$ …答

(4)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$C+A=2A+\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\Leftrightarrow \dfrac{C+A}{2}=A+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$B=\pi-A-\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}-2A>0$ で，$0<A<\dfrac{\pi}{3}$

(**) より

$$5\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=2+\cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{5}{2}+\cos 2\theta\quad\left(\theta=A+\frac{\pi}{6}\text{ とおいた}\right)$$

$$5\sqrt{3}\cos\theta=5+2(2\cos^2\theta-1)$$

$$4\cos^2\theta-5\sqrt{3}\cos\theta+3=0$$

$$(4\cos\theta-\sqrt{3})(\cos\theta-\sqrt{3})=0$$

$0<A<\dfrac{\pi}{3}$ より，$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $0<\cos\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であり，このとき $\sin\theta>0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\frac{3}{16}}\\&=\frac{\sqrt{13}}{4}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\cos A&=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{3+\sqrt{13}}{8}\end{aligned}$$ …答

【戦略 2】

余弦定理ではなく，正弦定理を用いて sin についての関係式を Get するのもやってみたいことの 1 つです。

というのも， $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ **という正弦定理は**

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

という連比を意味するため， $a+c=2b$ **から**

$$\sin A+\sin C=2\sin B$$

に辿り着くことを目論めるからです。

今回の問題のほとんどは C **が与えられたときの** $\cos A$ **の値を求めることであるため，** B **を消去してしまうことで**

$$\begin{aligned}\sin A+\sin C&=2\sin\{\pi-(A+C)\}\\&=2\sin(A+C)\end{aligned}$$

としたくなるでしょう。

左辺を和積公式でまとめた際に $\dfrac{A+C}{2}$ **という角度が登場することを考えると，右辺は** $4\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}$ **として見たくなると思います。**

これにより，

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$\sin\dfrac{A+C}{2}\fallingdotseq 0$ **であることを考えると，** $\cos\dfrac{A-C}{2}=2\cos\dfrac{A+C}{2}$

であり，加法定理でバラすことで

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left\{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}$$

これを整理すると， $3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ **となり**

$$3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

すなわち， $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ **という強力な関係式を Get できます。**

【解 2】

a，b，c がこの順に等差数列をなすことから，$\begin{cases} 0<a \leqq b \leqq c \\ 2b=a+c \end{cases}$ を満たす。

△ABCの外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，すなわち $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$ を得るため

$2b=a+c$ から，$4R\sin B=2R(\sin A+\sin C)$

よって，

$$\begin{aligned} \sin A+\sin C &= 2\sin B \\ &= 2\sin(\pi-(A+C)) \\ &= 2\sin(A+C) \end{aligned}$$

和積公式，2 倍角の公式より

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$0<A+C<\pi$ であるため，$0<\dfrac{A+C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\dfrac{A+C}{2}\neq 0$

ゆえに，$\cos\dfrac{A-C}{2}=2\cos\dfrac{A+C}{2}$

加法定理から，$\begin{cases} \cos\dfrac{A-C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} \\ \cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} \end{cases}$

よって，

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left\{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}$$

これより，$3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$0<A<\pi$，$0<C<\pi$ なので，$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であり，

$\cos\dfrac{A}{2}\neq 0$，$\cos\dfrac{C}{2}\neq 0$ であるから，両辺 $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ で割ることで

$$3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

すなわち，$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ …(☆) を得る。

(1)　[1]　$A=\dfrac{\pi}{3}$ のときは $\cos A=\dfrac{1}{2}$

[2]　$C=\dfrac{\pi}{3}$ のときは，最大角 C が $\dfrac{\pi}{3}$ より，$A+B=\dfrac{2\pi}{3}$ であることを考えると，$A=B=\dfrac{\pi}{3}$ となる。

よって，$\cos A=\dfrac{1}{2}$

[3]　$B=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，すなわち $C=\dfrac{2\pi}{3}-A$

$$\begin{aligned} \tan\frac{C}{2} &= \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{A}{2}\right) \\ &= \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{A}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{A}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\tan\frac{A}{2}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}} \end{aligned}$$

(☆) より，$\tan\dfrac{A}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\tan\frac{A}{2}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}=\dfrac{1}{3}$

$\tan\dfrac{A}{2}=T$ とおくと，$\dfrac{T(\sqrt{3}-T)}{1+\sqrt{3}T}=\dfrac{1}{3}$

$3T(\sqrt{3}-T)=1+\sqrt{3}T$ で，整理すると，$3T^2-2\sqrt{3}T+1=0$

これより，$(\sqrt{3}T-1)^2=0$ となり，$T=\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。

よって，$\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，すなわち $A=\dfrac{\pi}{3}$ であり，$\cos A=\dfrac{1}{2}$

以上 [1], [2], [3] から $\cos A=\dfrac{1}{2}$ …答

(2)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，(☆) より，$\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって，$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \cos A &= 2\cos^2\frac{A}{2}-1 \\ &= 2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}-1 \quad \cdots(\bigstar) \\ &= \frac{2}{1+\frac{1}{27}}-1 \\ &= \frac{13}{14} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3)　$C=2A$ のとき，(☆) より，$\tan\dfrac{A}{2}\tan A=\dfrac{1}{3}$

$\tan\dfrac{A}{2}\cdot\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}=\dfrac{1}{3}$ であり，$\tan\dfrac{A}{2}=T$ とおくと

$\dfrac{2T^2}{1-T^2}=\dfrac{1}{3}$ となり，$T^2\left(=\tan^2\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{1}{7}$ を得る。

(★) より，
$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{2}{1+\frac{1}{7}}-1 \\ &= \frac{3}{4} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(4) $C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{C}{2}&=\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{\pi}{6}}\\&=\frac{\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{A}{2}}\\&=\frac{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}+1}{\sqrt{3}-\tan\frac{A}{2}}\end{aligned}$$

$\tan\dfrac{A}{2}=T$ とおくと，(☆) より，$T\cdot\dfrac{\sqrt{3}T+1}{\sqrt{3}-T}=\dfrac{1}{3}$

これを整理すると，$3\sqrt{3}T^2+4T-\sqrt{3}=0$

ゆえに，$T=\dfrac{-2\pm\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$

$T>0$ なので，$T=\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$

ゆえに，$T^2=\dfrac{17-4\sqrt{13}}{27}$

(★) より，

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{2}{1+T^2}-1\\&=\frac{2}{1+\frac{17-4\sqrt{13}}{27}}-1\\&=\frac{3+\sqrt{13}}{8}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

訊かれていることがそんなに複雑ではないため，ムキになりやすく，クシャクシャになりかねない問題です。

結局は手元にある

$$\begin{cases}2b=a+c\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\end{cases}$$

という関係式をどう結び付けていくかというところが問われているわけですが，

今回求める $\cos A$ というのは比であり，△ABC の大きさによらない

という部分をいち早くとらえ，

a，b，c よりも A，B，C についての関係式を Get しにいく

という態度で本問に向き合えたかが，完答できたかどうかの差となるでしょう。