正八面体の辺ベクトルについての論証

　xyz 空間内の正八面体の頂点 P_1，P_2，……，P_6 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \fallingdotseq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v} \fallingdotseq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。

＜ ’01 京都大 ＞

【戦略 1】

一般に，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ としたとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ なので

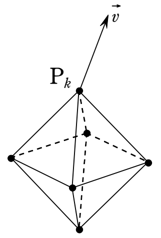
$$\begin{cases} \theta \text{ が鋭角} \iff \cos\theta > 0 \iff \vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \\ \theta \text{ が直角} \iff \cos\theta = 0 \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \\ \theta \text{ が鈍角} \iff \cos\theta < 0 \iff \vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \end{cases}$$

ということが言えます。

つまり内積が負ということはなす角が鈍角ということです。

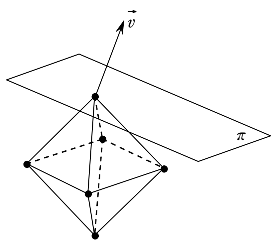
ベクトルというのは位置によりませんから，与えられた $\vec{v}$ の始点を正八面体の頂点に重ねることが可能です。

そう考えると



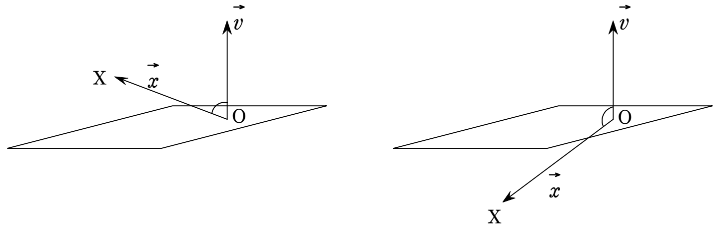
といったように，$\vec{v}$ となす角がすべて鈍角となるような辺ベクトルの起点 P_k が存在することを示すことになります。

ちょうど $\vec{v}$ と直交する平面（$\vec{v}$ を法線ベクトルにもつ平面）π を書き添えると明確であり，



というような状態を作れるということを言えばよいわけです。

【解 1】



$\vec{v}$ を法線ベクトルにもつ平面を π としたとき，π 上の 1 点 O を $\vec{v}$ の始点とする。

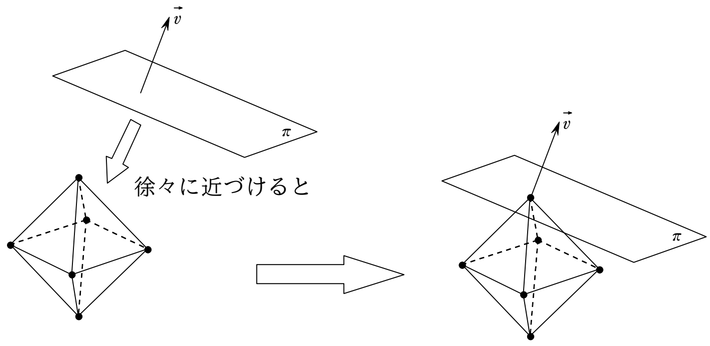
$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \vec{x}$ としたとき，

$$\begin{cases} \text{X が } \pi \text{ について } \vec{v} \text{ の終点と同じ側にあるとき } \vec{x}\cdot\vec{v} > 0 \\ \text{X が } \pi \text{ 上の点であるとき } \vec{x}\cdot\vec{v} = 0 \\ \text{X が } \pi \text{ について } \vec{v} \text{ の終点と反対側にあるとき } \vec{x}\cdot\vec{v} < 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

さて，与えられた $\vec{v}$ に対して，$\vec{v}$ を法線ベクトルにもつ平面を π とする。

正八面体の一辺 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ がこの平面 π 上にあると仮定すると $\overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}\cdot\vec{v} = 0$ となり，条件に反する。

ゆえに，正八面体のどの辺も π 上にない。



やがて 1 点を共有する

この共有する 1 点を P_k $(k = 1，2，\cdots，6)$ とする。

$(*)$ より $k \fallingdotseq m$ を満たす任意の m $(m = 1，2，\cdots，6)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v} < 0$$

が成り立ち，題意の P_k の存在が示された。

【戦略 2】

$\overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}<0$ とは，$(\overrightarrow{OP_m}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\vec{v}<0$，すなわち

$$\overrightarrow{OP_m}\cdot\vec{v}<\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}$$

ということです。

つまり，正八面体の 6 つの頂点 P_1，P_2，…，P_6 に対して

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}，\overrightarrow{OP_2}\cdot\vec{v}，\cdots，\overrightarrow{OP_6}\cdot\vec{v}$$

の中の最大値を $\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}$ とすれば任意の m（$\neq k$）に対して

$$\overrightarrow{OP_m}\cdot\vec{v}<\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}$$

ということが言えて題意の P_k の存在が示されます。

【解 2】

$1\leqq i\leqq 6$，$1\leqq j\leqq 6$，$i\neq j$ なる自然数 i，j に対して，$\overrightarrow{P_iP_j}\cdot\vec{v}\neq 0$ という条件から

$$(\overrightarrow{OP_j}-\overrightarrow{OP_i})\cdot\vec{v}\neq 0$$

すなわち，$\overrightarrow{OP_i}\cdot\vec{v}\neq\overrightarrow{OP_j}\cdot\vec{v}$

これは $\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}$，$\overrightarrow{OP_2}\cdot\vec{v}$，…，$\overrightarrow{OP_6}\cdot\vec{v}$ が全て異なる値であることを意味する。

これらの中で最大のものを $\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}$ とする。$(k=1，2，\cdots，6)$

このとき，$k\neq m$ なる任意の m $(m=1，2，\cdots，6)$ に対して

$$\overrightarrow{OP_m}\cdot\vec{v}<\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}$$

（$k\neq m$ なので等号は成立しないことに注意）

すなわち，$(\overrightarrow{OP_m}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\vec{v}<0$ であり，$\overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}<0$ が成立し，題意の P_k の存在が示された。

【総括】

本問の主張は人によっては当たり前に感じるかもしれません。

ただ，何を言えばよいのかを言語化する点で難しく，内容と難易度のギャップが大きい問題です。

本問は大枠は「存在命題（題意を満たす P_k の存在を示す)」であり，題意というのが「全称命題（全ての m に対して … という形の命題）」です。

なお，本問の解答を見れば分かると思いますが，本問で主張している内容は何も正八面体に限った話ではないため，試験場で出会った当時の受験生は不気味に感じたことでしょう。