

条件付き確率【原因の確率】類題

本当のことを言う確率が80%の人が3人いる。今、投げられた1枚の硬貨について、3人とも「表が出た」と証言した。本当に表が出た確率を求めよ。

< '81 甲南大 >

【戦略】

例えば表が出ていて何にも条件がなければ3人の証言は

「表(本当)」「裏(嘘)」「裏(嘘)」

のようにバラバラになることも含めて、全事象の可能性は沢山あるわけですが、

3人とも「表」と証言した

という情報が入ることにより、全事象の可能性は縮みます。

3人とも「表が出た」と証言するという中身を見てみると

$$\begin{cases} \text{表が出ていて3人とも本当のことを言う} & \dots \text{①} \\ \text{裏が出ていて3人とも嘘を言う} & \dots \text{②} \end{cases}$$

という可能性があります。

①, ②が起こっている可能性の中で①が起こっている確率を求めるわけです。

【解答】

硬貨を投げて表が出るという事象を A

3人とも「表が出た」と証言するという事象を B とする。

求める確率は $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

【 $P(B)$ について】

3人とも表が出たと証言するのは

$$\begin{cases} \text{表が出ていて3人とも本当のことを言う} & \dots \text{①} \\ \text{裏が出ていて3人とも本当のことを言わない} & \dots \text{②} \end{cases}$$

のいずれかの事象が起こったとき。

①, ②は排反なので、 $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{13}{50}$

【 $P(A \cap B)$ について】

表が出て、かつ3人とも「表が出た」と証言する確率であり、①が起こる確率なので

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{250}$$

以上から、求める条件付き確率 $P_B(A)$ は

$$P_B(A) = \frac{\frac{64}{250}}{\frac{13}{50}} = \frac{64}{65} \dots \text{㊟}$$

【総括】

コインの結果 → 証言

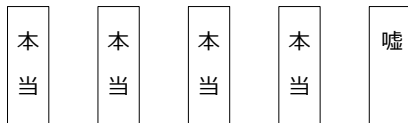
というのが、時系列に沿った流れなのですが

証言 → コインの結果

という時系列を遡るような形の確率を考えるわけです。

例題で考えた「神様方式」で考えてみます。

神様がこの3人に対して



のくじを引き、本当のことを言うか言わないかが決まるとしましょう。

通常であれば、

硬貨の出方が2通り

3人の証言の仕方が 5^3 通り

なので、 $2 \cdot 5^3 = 250$ 【通り】が全事象です。

ところが、「3人とも表と証言した」という条件が入ることにより、250通りの中の何通りかは削れてしまいます。

表が出て、かつ神様によって3人とも「本当」のくじが引かれるのは

4^3 通り

裏が出て、かつ神様によって3人とも「嘘」のくじが引かれるのは

1^3 通り

ですから、 $4^3 + 1^3 = 65$ 【通り】が「3人とも表と証言した」という情報が入ることにより考えられる全事象です。

そのうち、本当に表が出ているのは $4^3 (= 64)$ 通りですから、求める確率は $\frac{64}{65}$ となるわけです。