本当のことを言う確率が 80 %の人が 3 人いる。今，投げられた 1 枚の硬貨について，3 人とも「表が出た」と証言した。本当に表が出た確率を求めよ。

＜ '81 甲南大 ＞

【戦略】

例えば表が出ていて何にも条件がなければ 3 人の証言は

「表 (本当) 」「裏 (嘘) 」「裏 (嘘) 」

のようにバラバラになることも含めて，全事象の可能性は沢山あるわけですが，

3 人とも「表」と証言した

という情報が入ることにより，全事象の可能性は縮みます。

3 人とも「表が出た」と証言するという中身を見てみると

$$\begin{cases}\text{表が出ていて 3 人とも本当のことを言う} & \cdots ① \\ \text{裏が出ていて 3 人とも嘘を言う} & \cdots ②\end{cases}$$

という可能性があります。

①，② が起こっている可能性の中で ① が起こっている確率を求めるわけです。

【解答】

硬貨を投げて表が出るという事象を A

3 人とも「表が出た」と証言するという事象を B とする。

求める確率は $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

【 $P(B)$ について】

3 人とも表が出たと証言するのは

$$\begin{cases}\text{表が出ていて 3 人とも本当のことを言う} & \cdots ① \\ \text{裏が出ていて 3 人とも本当のことを言わない} & \cdots ②\end{cases}$$

のいずれかの事象が起こったとき。

①，② は排反なので，$P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^3+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{13}{50}$

【 $P(A\cap B)$ について】

表が出て，かつ 3 人とも「表が出た」と証言する確率であり，① が起こる確率なので

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{250}$$

以上から，求める条件付き確率 $P_B(A)$ は

$$P_B(A)=\frac{\dfrac{64}{250}}{\dfrac{13}{50}}=\frac{64}{65}\ \cdots 答$$

© MathClinic

【総括】

コインの結果 → 証言

というのが，時系列に沿った流れなのですが

証言 → コインの結果

という時系列を遡るような形の確率を考えるわけです。

例題で考えた「神様方式」で考えてみます。

神様がこの3人に対して

本当	本当	本当	本当	嘘

のくじを引き，本当のことを言うか言わないかが決まるとしましょう。

通常であれば，

硬貨の出方が2通り

3人の証言の仕方が5^3通り

なので，$2\cdot5^3=250$【通り】 が全事象です。

ところが，「3人とも表と証言した」という条件が入ることにより，250通りの中の何通りかは削れてしまいます。

表が出て，かつ 神様によって3人とも「本当」のくじが引かれるのは

4^3通り

裏が出て，かつ神様によって3人とも「嘘」のくじが引かれるのは

1^3通り

ですから，$4^3+1^3=65$【通り】 が「3人とも表と証言した」という情報が入ることにより考えられる全事象です。

そのうち，本当に表が出ているのは$4^3(=64)$通り ですから，求める確率は$\dfrac{64}{65}$となるわけです。

© *MathClinic*