5回に1回の割合で帽子を忘れるくせのあるK君が，正月にA，B，C3軒をこの順に年始まわりをして家に帰ったとき，帽子を忘れてきたことに気がついた。

2番目の家Bに忘れてきた確率を求めよ。

＜ ’76 早稲田大 ＞

【戦略】

A，B，C の家で帽子を忘れるという事象をそれぞれ A，B，C とし，この3軒のどこかで帽子を忘れるという事象を F としたとき，求める確率は

$$P_F(B)=\frac{P(F\cap B)}{P(F)}$$

という条件付き確率です。

$P(F)$ は $P(A)+P(B)+P(C)$ となりますし，$P(F\cap B)$ については $P(B)$ です。

【解答】

Aの家で帽子を忘れるという事象を A

Aの家で帽子を忘れないで，Bの家で帽子を忘れるという事象を B

A，Bの家で帽子を忘れないで，Cの家で帽子を忘れるという事象を C

とする。

この3軒の家のどこかで帽子を忘れるという事象を F とすると，求める確率は

$$P_F(B)=\frac{P(F\cap B)}{P(F)}$$

ここで，

$$P(A)=\frac{1}{5}$$

$$P(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

$$P(C)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

であり，

$$\begin{aligned}P(F)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}\\&=\frac{61}{125}\end{aligned}$$

また，$P(F\cap B)=P(B)=\dfrac{4}{25}$

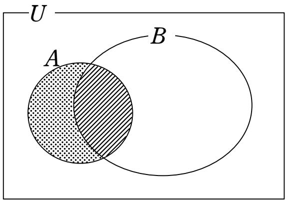
ゆえに，求める確率 $P_F(B)$ は

$$P_F(B)=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\frac{20}{61}\ \cdots 答$$

【総括】

事象 A が起こったという条件の下で，事象 B が起こる確率を条件付き確率といい，$P_A(B)$ と表します。

A が起こったということが確定していれば，全事象は $n(A)$ ということになり，その中で B が起こっている確率を求めることになりますから



$P_A(B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ となります。

分母・分子を $n(U)$ で割ることで，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ということも言えるわけです。

条件付き確率のイメージとしては

情報が入ることによって，全事象(可能性)が縮む

というイメージです。

何も情報がなければ，全事象 (可能性) は $n(U)$ ですが，「A が起こった」という情報が入ることにより，余計な可能性が減るわけです。

本問で言えば，$P(B)$ と $P_F(B)$ の違いがよく分からないという人が多いと思います。

そこで，K 君を操っている神様がいて，この神様が A，B，C の 3 軒で

忘れる	忘れない	忘れない	忘れない	忘れない

のくじを引くものとしてください。

普通に考えれば，$5^3=125$ 通りの可能性があるわけです。

B の家で忘れるのは神様が

忘れない → 忘れる → 何でも

と札を取ったときで，$4\times1\times5=20$【通り】 ということになります。

125 通りのうち，20 通りが B で忘れる確率ということで，これが $P(B)$ であり，$P(B)=\dfrac{20}{125}\left(=\dfrac{4}{25}\right)$ ということになります。

ただ，どこかで神様が「『忘れる』の札を取った」という情報が入ってくると話は変わります。

どこかで忘れるの札を取ったということは

3 回とも「忘れない」の札をとるという $4^3\,(=64)$ 通りが除外される

ということで，$125-64=61$ 【通り】が考えられる可能性 (全事象) ということになるわけです。

そのうち，B の家で忘れるのは神様が

忘れない → 忘れる → 何でも

と札を取る $4\times1\times5=20$【通り】 であり，

この $\dfrac{20}{61}$ が条件付き確率 $P_F(B)$ ということになります。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ という条件付き確率は分母を払うと

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

ということになります。

右辺 … A が起こり，かつ A が起こった下で B が起こる確率

これが左辺の A が起こり かつ B が起こる確率となっているのは非常に分かりやすい形と言えましょう。

これが分かりやすいのは，

$$P(A\cap B)=\underrightarrow{P(A)\cdot P_A(B)}$$

ここが時系列に沿っている

という部分にあるでしょう。

時系列に逆らう $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ という見方は最初は違和感を感じるかもしれませんが，本問のような

「原因の確率」

を考える際にはうってつけであることが分かるでしょう。

本問は「帽子を忘れてしまった」という結果に対して，それが「 B の家に忘れてきたことが原因である確率は？」という原因の確率です。

起こってしまった結果に対して，その原因の確率を考えるのは，時系列を遡ることになり，この条件付き確率で求めていくことになるわけです。