放物線と２直線で囲まれる部分の面積

k を正の実数とする。 xy 平面において，連立不等式

$$y-x^2 \geqq 0,\ (y-kx-1)(y-kx-x-1) \leqq 0$$

の表す領域の面積を $S(k)$ とする。

(1)　$S(k)$ を求めよ。

(2)　$S(k)=\dfrac{1}{2}k^3$ となる k の値がただ１つあることを示せ。

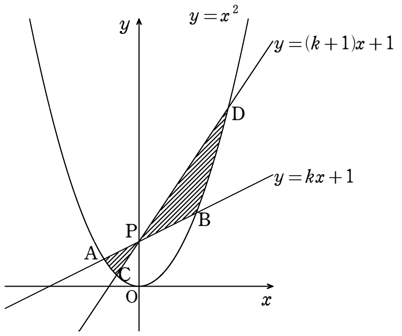
＜ '99 大阪府立大 ＞

【戦略 1】

(1)　**ひとまず，題意の領域を図示したいと思います。**

$$AB \leqq 0 \iff \begin{cases} A \geqq 0 \\ B \leqq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} A \leqq 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$$

ということを利用して丁寧に捌いていくと



という領域が得られるでしょう。

ここからは

$x^2=kx+1$（$\iff x^2-kx-1=0$）**の解** $\alpha,\ \beta$

$x^2=(k+1)x+1$（$\iff x^2-(k+1)x-1=0$）**の解** $\gamma,\ \delta$

と交点の x **座標を設定し，面積を立式していきます。**

ここでは

△PAC，△PBD **は座標の面積公式**

残りの部分は $\dfrac{1}{6}$ **公式**

という比較的愚直な方針で捌いていきます。

ただ，まともに計算していくと心が折れそうな計算となります。

目がチカチカする部分は置き換えて目に優しく処理していきます。

(2)　(1) **が正しく計算できていれば，** $S(k)=\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{1}{2}k+\dfrac{7}{6}$ **と出ています。**

$\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{1}{2}k+\dfrac{7}{6}=\dfrac{1}{2}k^3$ **を整理すると** $3k^3-3k^2-3k-7=0$ **という**

３**次方程式が出てくるため，これが正の実数解をただ**１**つもつことを示せばよく，微分して増減表を得る基本的な問題です。**

【解 1】

(1)　$y-x^2 \geqq 0 \iff y \geqq x^2 \cdots ①$

$(y-kx-1)(y-kx-x-1) \leqq 0$

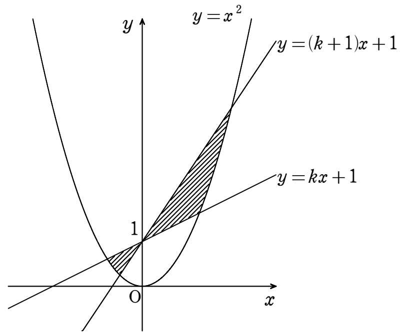
$$\iff \begin{cases} y-kx-1 \geqq 0 \\ y-kx-x-1 \leqq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y-kx-1 \leqq 0 \\ y-kx-x-1 \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y \geqq kx+1 \\ y \leqq (k+1)x+1 \end{cases} \cdots ② \text{ または } \begin{cases} y \leqq kx+1 \\ y \geqq (k+1)x+1 \end{cases} \cdots ③$$

題意の領域は

「① かつ ②」または「① かつ ③」

を満たす領域であり，これを図示すると以下の (図 1) の斜線部の領域である。(ただし，境界線を含む。)



(図 1)

$y=x^2$ と $y=kx+1$ の交点の x 座標について

$x^2=kx+1$，すなわち $x^2-kx-1=0$ を解くと

$$x=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$$

簡単のため，$k^2+4=D_1$（>0）として，

$$\alpha=\frac{k-\sqrt{D_1}}{2},\ \beta=\frac{k+\sqrt{D_1}}{2}$$

とする。

$y=x^2$ と $y=(k+1)x+1$ の交点の x 座標について

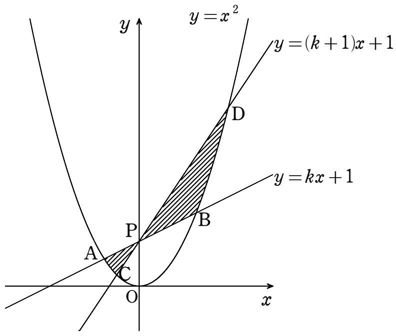
$x^2=(k+1)x+1$，すなわち $x^2-(k+1)x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{k+1\pm\sqrt{(k+1)^2+4}}{2}$$

簡単のため，$(k+1)^2+4=D_2$（>0）として

$$\gamma=\frac{k+1-\sqrt{D_2}}{2},\ \delta=\frac{k+1+\sqrt{D_2}}{2}$$

とする。



(図 2)

$\mathrm{A}(\alpha,\ k\alpha+1)$，$\mathrm{B}(\beta,\ k\beta+1)$，$\mathrm{C}(\gamma,\ (k+1)\gamma+1)$，$\mathrm{D}(\delta,\ (k+1)\delta+1)$

として，$\mathrm{P}(0,\ 1)$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\begin{pmatrix}\alpha\\ k\alpha+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ k\alpha\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\begin{pmatrix}\gamma\\ (k+1)\gamma+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\ (k+1)\gamma\end{pmatrix}$$

$$\triangle\mathrm{PAC}=\frac{1}{2}|\,\alpha\gamma(k+1)-k\alpha\gamma\,|=\frac{1}{2}|\alpha\gamma|$$

$\alpha<0$，$\gamma<0$ であることに注意すると，$\triangle\mathrm{PAC}=\dfrac{1}{2}\alpha\gamma$

一方，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\begin{pmatrix}\beta\\ k\beta+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ k\beta\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\begin{pmatrix}\delta\\ (k+1)\delta+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\\ (k+1)\delta\end{pmatrix}$$

同様に，$\triangle\mathrm{PBD}=\dfrac{1}{2}|\beta\delta|$ で，$\beta>0$，$\delta>0$ に注意すると

$$\triangle\mathrm{PBD}=\frac{1}{2}\beta\delta$$

よって，$S(k)=\dfrac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3+\dfrac{1}{2}\alpha\gamma+\dfrac{1}{6}(\delta-\beta)^3+\dfrac{1}{2}\beta\delta$ …①

ここで，

$$\gamma-\alpha=\frac{(k+1)-\sqrt{D_2}}{2}-\frac{k-\sqrt{D_1}}{2}=\frac{1+\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{2}$$

$$\delta-\beta=\frac{(k+1)+\sqrt{D_2}}{2}-\frac{k+\sqrt{D_1}}{2}=\frac{1-\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}}{2}$$

$\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}=K$ とおくと，

$$\begin{aligned}(\gamma-\alpha)^3+(\delta-\beta)^3&=\frac{1}{8}\{(1+K)^3+(1-K)^3\}\\&=\frac{1}{8}\{(1+3K+3K^2+K^3)+(1-3K+3K^2-K^3)\}\\&=\frac{1}{8}(2+6K^2)\\&=\frac{1}{4}(1+3K^2)\end{aligned}$$

よって，
$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3+\frac{1}{6}(\delta-\beta)^3&=\frac{1}{24}(1+3K^2)\\&=\frac{1}{24}\{1+3(\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2})^2\}\\&=\frac{1+3(D_1+D_2-2\sqrt{D_1D_2})}{24}\quad\cdots②\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\alpha\gamma+\beta\delta&=\frac{k-\sqrt{D_1}}{2}\cdot\frac{k+1-\sqrt{D_2}}{2}+\frac{k+\sqrt{D_1}}{2}\cdot\frac{k+1+\sqrt{D_2}}{2}\\&=\frac{k(k+1)-k\sqrt{D_2}-(k+1)\sqrt{D_1}+\sqrt{D_1D_2}}{4}\\&\qquad+\frac{k(k+1)+k\sqrt{D_2}+(k+1)\sqrt{D_1}+\sqrt{D_1D_2}}{4}\\&=\frac{2k(k+1)+2\sqrt{D_1D_2}}{4}\\&=\frac{k(k+1)+\sqrt{D_1D_2}}{2}\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{2}\alpha\gamma+\dfrac{1}{2}\beta\delta=\dfrac{k(k+1)+\sqrt{D_1D_2}}{4}$ …③

②，③ を ① に代入して

$$\begin{aligned}S(k)&=\frac{1+3(D_1+D_2-2\sqrt{D_1D_2})}{24}+\frac{k(k+1)+\sqrt{D_1D_2}}{4}\\&=\frac{1+3(D_1+D_2)-6\sqrt{D_1D_2}+6k(k+1)+6\sqrt{D_1D_2}}{24}\\&=\frac{1+3(D_1+D_2)+6k(k+1)}{24}\\&=\frac{1+3\{(k^2+4)+(k+1)^2+4\}+6k(k+1)}{24}\\&=\frac{1+3(2k^2+2k+9)+6k^2+6k}{24}\\&=\frac{12k^2+12k+28}{24}\\&=\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+\frac{7}{6}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{1}{2}k+\dfrac{7}{6}=\dfrac{1}{2}k^3 \iff \dfrac{1}{2}k^3-\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{2}k-\dfrac{7}{6}=0$

$\iff 3k^3-3k^2-3k-7=0$ …(*)

より，(*) を満たす正の実数 k の値がただ 1 つであることを示す。

$f(k)=3k^3-3k^2-3k-7$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(k)&=9k^2-6k-3\\&=3(3k^2-2k-1)\\&=3(3k+1)(k-1)\end{aligned}$$

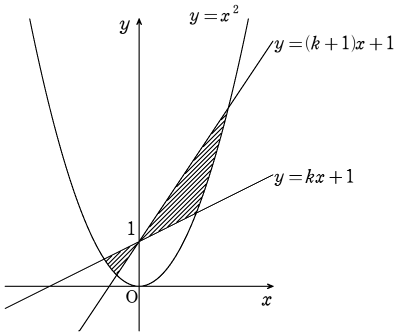
$k>0$ における増減表は以下のようになる。

k	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f(k)$	$\left(-\frac{7}{6}\right)$	↘	-10	↗	(∞)

$f(k)$ は k についての連続関数であるため，$f(k)=0$ となる $k\,(>0)$ がただ 1 つ存在し，題意は示された。

【戦略 2】(1) について

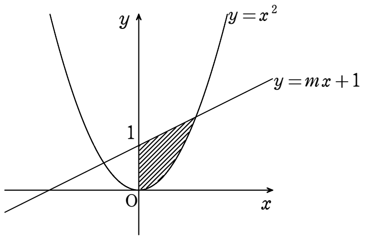
題意の面積は



なのですが，

傾き k → 傾き $k+1$ に変化した際の面積の変化量

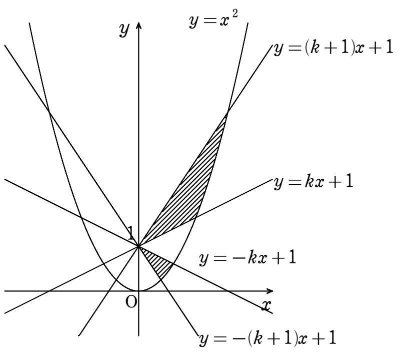
と捉え，一般に



という傾き m に依存する部分の面積を先回りで計算しておく作戦もよいでしょう。

この面積は傾き m に依存し，$T(m)$ という m の式となるはずです。

そして，題意の面積を y 軸に関して対称移動させることにより



$$S(k)=\{T(k+1)-T(k)\}+\{T(-k)-T(-k-1)\}$$

として捌いていきます。

ただし，

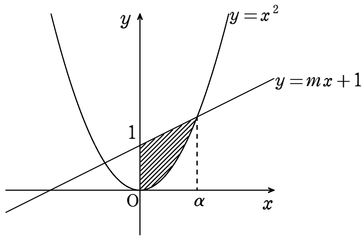
$T(k+1)-T(-k-1)$ という部分と $T(k)-T(-k)$

というように，似た者同士は寄せ集めて打ち消しあいを狙えないかを試みるように計算をしていきます。

【解 2】

(図 1) の領域を導くまでは【解 1】と同じ

一般に，$x \geqq 0$ の範囲において，右の図の斜線部分の面積 $T(m)$ を考える。



$y=x^2$ と $y=mx+1$ の交点の x 座標のうち大きいほうを α とすると，

$$\alpha^2=m\alpha+1 \quad \cdots (☆)$$

$$\begin{aligned}
T(m)&=\int_0^{\alpha}\{(mx+1)-x^2\}\,dx\\
&=\left[\frac{m}{2}x^2+x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\alpha}\\
&=-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{m}{2}\alpha^2+\alpha\\
&=\frac{1}{6}\alpha(-2\alpha^2+3m\alpha+6)\\
&=\frac{1}{6}\alpha\{-2(m\alpha+1)+3m\alpha+6\} \quad (\because (☆))\\
&=\frac{1}{6}\alpha\{m\alpha+4\}\\
&=\frac{1}{6}(m\alpha^2+4\alpha)\\
&=\frac{1}{6}\{m(m\alpha+1)+4\alpha\} \quad (\because (☆))\\
&=\frac{1}{6}\{(m^2+4)\alpha+m\}
\end{aligned}$$

ここで，α は $x^2-mx-1=0$ の解のうち大きいほうであるため

$$\alpha=\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$$

よって，

$$\begin{aligned}
T(m)&=\frac{1}{6}\left\{(m^2+4)\cdot\frac{m+(m^2+4)^{\frac{1}{2}}}{2}+m\right\}\\
&=\frac{m(m^2+4)+(m^2+4)^{\frac{3}{2}}}{12}+\frac{1}{6}m\\
&=\frac{1}{12}\left\{(m^2+4)^{\frac{3}{2}}+m^3+6m\right\}
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
S(k)&=\{T(k+1)-T(k)\}+\{T(-k)-T(-k-1)\}\\
&=\{T(k+1)-T(-k-1)\}-\{T(k)-T(-k)\} \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
T(k+1)&=\frac{1}{12}\left\{((k+1)^2+4)^{\frac{3}{2}}+(k+1)^3+6(k+1)\right\}\\
&=\frac{1}{12}\left\{\{(k+1)^2+4\}\sqrt{(k+1)^2+4}+(k+1)^3+6(k+1)\right\}
\end{aligned}$$

差をとれば打ち消しあいます

$$\begin{aligned}
T(-k-1)&=\frac{1}{12}\left\{((-k-1)^2+4)^{\frac{3}{2}}+(-k-1)^3+6(-k-1)\right\}\\
&=\frac{1}{12}\left\{\{(k+1)^2+4\}\sqrt{(k+1)^2+4}-(k+1)^3-6(k+1)\right\}
\end{aligned}$$

ゆえに，
$$\begin{aligned}
T(k+1)-T(-k-1)&=\frac{1}{12}\{2(k+1)^3+12(k+1)\}\\
&=\frac{1}{6}(k+1)^3+(k+1) \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

$k+1=K$ とおくと，$T(K)-T(-K)=\dfrac{1}{6}K^3+K$ であるため

$$T(k)-T(-k)=\frac{1}{6}k^3+k \quad \cdots ③$$

結局 ② で求めたのは
$T(●)-T(-●)$ という形ですから
省エネできるということです。

②，③ を ① に代入し

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{1}{6}(k+1)^3+(k+1)-\left(\frac{1}{6}k^3+k\right) \\ &= \frac{1}{6}(k^3+3k^2+3k+1)+(k+1)-\frac{1}{6}k^3-k \\ &= \frac{1}{2}k^3+\frac{1}{2}k+\frac{7}{6} \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

【総括】

(1) が簡単な顔をした曲者であり，何の工夫もなしに立ち向かうと途中で投げ出したくなるような計算に襲われますし，あれこれ工夫できないかを色々試行錯誤して八方ふさがりのような感覚になる受験生が多いと思います。

$\dfrac{1}{6}$ 公式などを駆使したとしても負担が極端に減るわけでもないため，

置き換えて目に優しく処理する

という単純明快な工夫がいかに強力なものかが実感できると思います。

なお，α，β，γ，δ と設定した後，これらを k の式に還元するという意識は最後まで持っておきましょう。（そもそも α，β，γ，δ 自体が k の式で表されている）

解と係数の関係を利用することを目論んだ人もいるかもしれませんが，

$\begin{cases} \alpha+\beta \\ \alpha\beta \end{cases}$，$\begin{cases} \gamma+\delta \\ \gamma\delta \end{cases}$ というペアは分かるのですが，$\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる部分についての面積が

$$\frac{1}{6}(\delta-\beta)^3,\ \frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3$$

と (α，γ ペア)，(β，δ ペア) で立式されてしまい，唸ってしまい立ち往生してしまうと思います。

解と係数の関係は潔く撤退し，解の公式路線で押し切る【解 1】が現実的です。

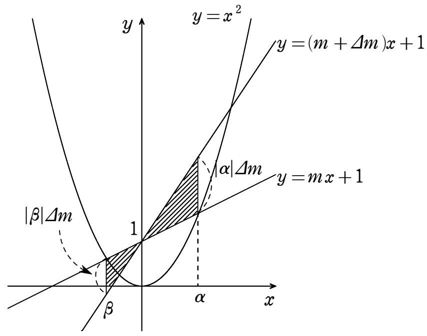
【解 2】については傾きをメインの変数と見る作戦なのですが，これを発展させ，

傾きを積分変数としてしまう

という以下のような解法も考えられます。（ただし，試験場では現実的ではない観賞用のものでしょう。）

◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇ 参考 ◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

傾き m の微小増加量 $\varDelta m$ に対し，面積の変化量 $\varDelta S$ を図の斜線部分の三角形の面積で近似し，



$$\begin{aligned} \varDelta S &= \frac{1}{2}\cdot|\alpha|\cdot|\alpha|\varDelta m+\frac{1}{2}\cdot|\beta|\cdot|\beta|\varDelta m \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\varDelta m \\ &= \frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\varDelta m \\ &= \frac{1}{2}\{m^2+2\}\varDelta m \quad (\because\ \alpha,\ \beta \text{ は } x^2-mx-1=0 \text{ の解}) \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{\varDelta m\to 0}\frac{\varDelta S}{\varDelta m}=\frac{dS}{dm}=\frac{1}{2}(m^2+2)$ であり，

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_k^{k+1}\frac{1}{2}(m^2+2)\,dm \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}m^3+2m\right]_k^{k+1} \\ &= \frac{1}{6}\Big[m^3\Big]_k^{k+1}+\Big[m\Big]_k^{k+1} \\ &= \frac{1}{6}\{(k+1)^3-k^3\}+\{(k+1)-k\} \\ &= \frac{1}{6}(3k^2+3k+1)+1 \\ &= \frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+\frac{7}{6} \end{aligned}$$