鋭角三角形 ABC の各頂点 A，B，C から対辺 BC，CA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AD，BE，CF は 1 点で交わることを証明せよ。

(2) (1) の交点を H としたとき，

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HE}=\mathrm{CH}\cdot\mathrm{HF}$$

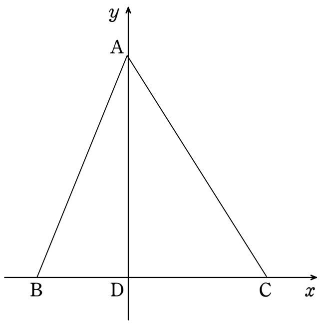
が成り立つことを証明せよ。

＜自作＞

【戦略 1】

(1) **座標で式的に示すのがよいでしょう。**

座標設定としては

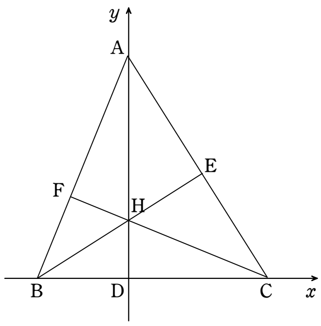


と直角を活かして，D を原点にするようにして

A$(0,a)$，B$(b,0)$，C$(c,0)$ $(a>0,\ b<0,\ c>0)$

と設定したいと思います。

(2) (1) **が出来た段階では，具体的に H の座標は分かっています。**



AH，HD **は問題なく立式できると思います。**

BH，CH **については三平方の定理で問題なく捌けます。**

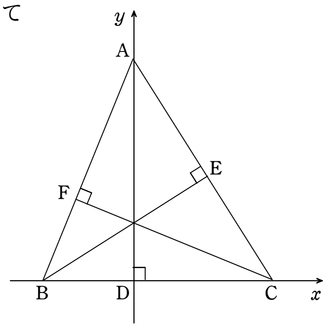
HE，HF **については点と直線の距離公式で捌けばよいでしょう。**

【解 1】

(1) D を原点，$a>0$，$b<0$，$c>0$ として

A$(0,a)$，B$(b,0)$，C$(c,0)$

という座標を定める。



直線 AC の傾きは $-\dfrac{a}{c}$ より，それに垂直な直線 BE の傾きは $\dfrac{c}{a}$

ゆえに，直線 BE の式は $y=\dfrac{c}{a}(x-b)$，すなわち $y=\dfrac{c}{a}x-\dfrac{bc}{a}$

直線 AB の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ より，それに垂直な直線 CF の傾きは $\dfrac{b}{a}$

ゆえに，直線 CF の式は $y=\dfrac{b}{a}(x-c)$，すなわち $y=\dfrac{b}{a}x-\dfrac{bc}{a}$

以上から，直線 AD (y 軸)，BE，CF は 1 点 $\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$ で交わる。

(2) 【 AH·HD について】

$$\mathrm{AH}=\left|\,a+\frac{bc}{a}\,\right|=\left|\frac{a^2+bc}{a}\right|,\ \mathrm{HD}=\left|\frac{bc}{a}\right|$$

よって，$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\dfrac{|bc\,(a^2+bc)|}{a^2}$ …①

【 BH·HE について】

直線 AC の式は $\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{a}=1$，すなわち $ax+cy-ca=0$

H$\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$ と直線 AC との距離が HE なので，

$$\mathrm{HE}=\frac{\left|-\dfrac{bc^2}{a}-ca\right|}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{\left|\dfrac{c\,(bc+a^2)}{a}\right|}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{|c|\,|a^2+bc|}{|a|\sqrt{a^2+c^2}}$$

三平方の定理より，

$$\mathrm{BH}=\sqrt{b^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2(a^2+c^2)}{a^2}}=\frac{|b|}{|a|}\sqrt{a^2+c^2}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{BH}\cdot\mathrm{HE}=\frac{|b|}{|a|}\sqrt{a^2+c^2}\cdot\frac{|c|\,|a^2+bc|}{|a|\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{|bc\,(a^2+bc)|}{a^2}\ \cdots②$$

【 CH･HF について】

直線 AB の式は $-\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$，すなわち $ax-by+ab=0$

$\mathrm{H}\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$ と直線 AB との距離が HF なので，

$$\mathrm{HF}=\frac{\left|\dfrac{b^2c}{a}+ab\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|\dfrac{b\,(a^2+bc)}{a}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b|\,|a^2+bc|}{|a|\sqrt{a^2+b^2}}$$

三平方の定理より

$$\mathrm{CH}=\sqrt{c^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2}}=\frac{|c|}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{CH}\cdot\mathrm{HF}=\frac{|c|}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{|b|\,|a^2+bc|}{|a|\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|bc\,(a^2+bc)|}{a^2}\ \cdots ③$$

①，②，③ より，AH･HD＝BH･HE＝CH･HF が成り立つ。

【戦略 2】

示すべき等式の形は方べきの定理を彷彿とさせます。

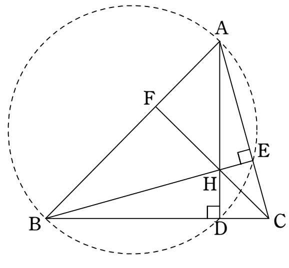
そこで，円を登場させる必要が出てきます。

ひとまず AH･HD＝BH･HE をターゲットにして，これが成り立つためには

4 点 A，E，D，B が同一円周上にあってほしい

という気持ちが芽生えるでしょう。

そして，4 点 A，E，D，B は円周角の定理から線分 AB を直径とする円上にあります。



これにより，

HA･HD＝HB･HE

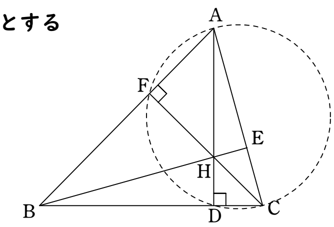
(AH･HD＝BH･HE)

が言えました。

同様に，

4 点 A，F，D，C が同一円周上にあってほしい

という気持ちで図を眺めると，やはり円周角の定理から 4 点 A，F，D，C は線分 AC を直径とする円上にあることが言え，



HA･HD＝HC･HF

(AH･HD＝CH･HF)

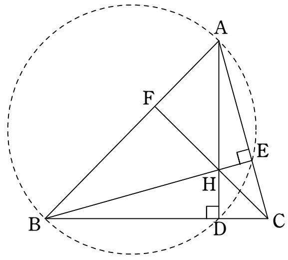
となるため，解決です。

【解 2】(2) について

$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{AEB}=\dfrac{\pi}{2}$ であり，円周角の定理から，4 点 A，E，D，B は線分 AB を直径とする円上にある。((図 1) 参照)

方べきの定理から，HA･HD＝HB･HE，

すなわち AH･HD＝BH･HE ⋯ ①



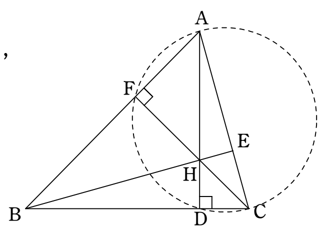
(図 1)

一方，$\angle\mathrm{AFC}=\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\pi}{2}$ であり，円周角の定理から，

4 点 A，F，D，C は線分 AC を直径とする円上にある。((図 2) 参照)

方べきの定理から，HA･HD＝HC･HF，

すなわち AH･HD＝CH･HF ⋯ ②

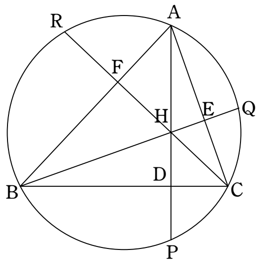


(図 2)

①，② より AH･HD＝BH･HE＝CH･HF が成り立つ。

【戦略 3】(2) について

同様に方べきの定理を狙っていきますが，ひとまず

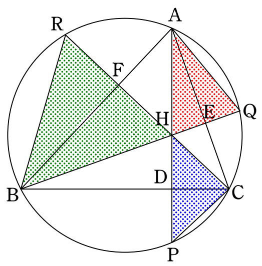


というように， P，Q，R **を定め，**

$$\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HP}=\mathrm{HB}\cdot\mathrm{HQ}=\mathrm{HC}\cdot\mathrm{HR}$$

という形で方べきの定理をかましてみます。

ここからは幾何特有の観察力の問題になってきますが，



$$\triangle\mathrm{CHD}\equiv\triangle\mathrm{CPD},\ \triangle\mathrm{AHE}\equiv\triangle\mathrm{AQE},\ \triangle\mathrm{BHF}\equiv\triangle\mathrm{BRF}$$

ということが見抜けると， $\begin{cases}\mathrm{HD}=\mathrm{DP}\\ \mathrm{HE}=\mathrm{EQ}\\ \mathrm{HF}=\mathrm{FR}\end{cases}$ **ということになりますから**

$\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HP}=\mathrm{HB}\cdot\mathrm{HQ}=\mathrm{HC}\cdot\mathrm{HR}$ **という方べきの定理は**

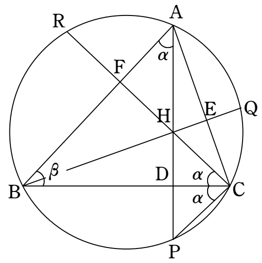
$$\mathrm{HA}\cdot 2\mathrm{HD}=\mathrm{HB}\cdot 2\mathrm{HE}=\mathrm{HC}\cdot 2\mathrm{HF}$$

すなわち， $\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HE}=\mathrm{CH}\cdot\mathrm{HF}$ **ということが言えるため，証明完了ということになります。**

【解 3】(2) について

直線 AH と△ABC の外接円の交点のうち，A でないものを P
直線 BH と△ABC の外接円の交点のうち，B でないものを Q
直線 CH と△ABC の外接円の交点のうち，C でないものを R

とする。



直角三角形 BAD に注目し，$\angle\mathrm{BAD}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABD}=\beta$ とすると，

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

直角三角形 BCF に注目すると，$\angle\mathrm{FCB}=\frac{\pi}{2}-\beta=\alpha$

円周角の定理より，$\angle\mathrm{BCP}=\angle\mathrm{BAP}=\alpha$

△CHD，△CPD において，$\begin{cases}\text{CD が共通辺}\\ \angle\mathrm{CDH}=\angle\mathrm{CDP}\left(=\frac{\pi}{2}\right)\\ \angle\mathrm{HCD}=\angle\mathrm{PCD}\ (=\alpha)\end{cases}$

であり，一辺とその両端の角が等しいため，$\triangle\mathrm{CHD}\equiv\triangle\mathrm{CPD}$

ゆえに，$\mathrm{HD}=\mathrm{DP}$ …① ということが言える。

同様にして，$\mathrm{HE}=\mathrm{EQ}$ …②，$\mathrm{HF}=\mathrm{FR}$ …③ も成り立つ。

方べきの定理から，$\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HP}=\mathrm{HB}\cdot\mathrm{HQ}=\mathrm{HC}\cdot\mathrm{HR}$

①，②，③ から $\mathrm{HP}=2\mathrm{HD}$，$\mathrm{HQ}=2\mathrm{HE}$，$\mathrm{HR}=2\mathrm{HF}$ なので

$$\mathrm{HA}\cdot 2\mathrm{HD}=\mathrm{HB}\cdot 2\mathrm{HE}=\mathrm{HC}\cdot 2\mathrm{HF}$$

これより，$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HE}=\mathrm{CH}\cdot\mathrm{HF}$ が成り立つ。

【総括】

(1) の座標路線の流れでそのままゴリ押す【解 1】はほぼ計算力が全てです。

幾何路線は見えるかどうかが問題なのですが，頭に血が昇るほど見えるものが見えなくなります。

例えば，冷静に方べきの定理を 2 発かませば【解 2】のようにアッサリ沈みますが，「一つの円で済まそう」という乱暴なことを考え出すと，
【解 3】のように工夫のハードルが上がってしまうでしょう。

なお，本問は鋭角三角形に絞りましたが，(1)，(2) の主張は $\triangle\mathrm{ABC}$が直角三角形でも鈍角三角形でも成り立ちます。

一応，直角三角形，鈍角三角形の場合を見てみます。

(1) の主張は，a，b，c の符号に依らず，$\mathrm{H}\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$ となりますから，
直角三角形や鈍角三角形でも言えることになります。

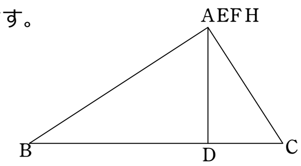
(2) の主張については，簡潔な【解 2】の路線で幾何的に見てみます。

【直角三角形の場合】

$\angle A$ が直角だと，A，E，F，H が一致します。

よって $\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HE}=\mathrm{CH}\cdot\mathrm{HF}=0$

となり，(2) の主張が従います。



$\angle B$，$\angle C$ が直角でも同様です。

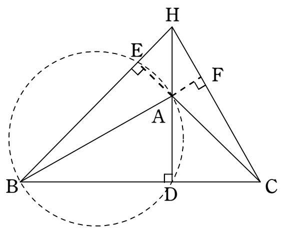
【鈍角三角形の場合】

$\angle A$ が鈍角の場合を考えれば十分です。

$\angle\mathrm{AEB}+\angle\mathrm{ADB}=\pi$ より
四角形 AEBD は円に内接するため，
方べきの定理から

$\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{HE}\cdot\mathrm{HB}$

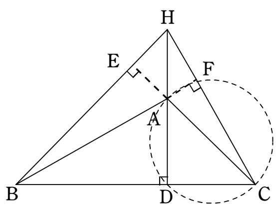
すなわち，$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HE}$ … ①



一方，$\angle\mathrm{AFC}+\angle\mathrm{ADC}=\pi$ より
四角形 ADCF は円に内接するため，
方べきの定理から

$\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{HF}\cdot\mathrm{HC}$

すなわち $\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{CH}\cdot\mathrm{HF}$ … ②



①，② より，$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HD}=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HE}=\mathrm{CH}\cdot\mathrm{HF}$ が成り立ちます。