n を正の整数として，

$$a_n = n\,! + 2023$$

としたとき，a_n が平方数となる正の整数 n を全て求めよ。

ただし，2029，2143 が素数であること，$2047=23\cdot 89$，$2743=13\cdot 211$ であることは用いてよい。

＜自作＞

【戦略 1】

ある程度のところまでは実験ができるでしょう。

$a_1=2024\ (=2^3\cdot 11\cdot 23)$
$a_2=2025\ (=45^2)$
$a_3=2029$ (素数)
$a_4=2047\ (=23\cdot 89)$
$a_5=2143$ (素数)
$a_6=2743\ (=13\cdot 211)$

ですから，ここまででは a_2 が平方数であるとわかります。

ここから先は $2023=7\times 17^2$ であることから，a_n が 7 で括れることに注意します。

例えば，$a_7=7063$ なわけですが，$7063=7\cdot 1009$ です。

平方数というのは $p_1{}^{偶数}\cdot p_2{}^{偶数}\cdots\cdots$ というように素因数分解したときの指数部分は偶数乗となります。

1009 が 7 の倍数でないため，7063 は素因数 7 を 1 つしかもたず平方数にはなり得ないことが分かります。

ここから先は同様の要領で，7 で括って出てくる残りの部分を $\mathrm{mod}\,7$ で捌いていけばよいでしょう。

ただし，a_9 については注意が必要で，$a_9=7\,(9\cdot 8\cdot 720+17^2)$ なのですが，

$$9\cdot 8\cdot 720+17^2\equiv 2\cdot 1\cdot 6+2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,7)$$

ということで，$9\cdot 8\cdot 720+17^2$ は素因数 7 をもってしまいます。

なので，仕方なく，もう少し踏み込んで具体的に計算します。

最終的に a_9 が 7^2 で割り切れることに注意しておけば，$a_9=7^2\cdot 7447$ という部分まで計算できるでしょう。

ここからは，7447 が平方数かどうかを見ますが，

$$86^2=7396,\ 87^2=7569$$

なので，$86^2<7447<87^2$ というように，連続した平方数で挟まれますから 7447 は平方数ではないと言え，a_9 も平方数でないと言えます。

$n\geqq 14$ 以降は $n\,!$ が素因数 7 を 2 つ以上もつことになりますから

$$\begin{aligned} a_n &= 7^2M+7\cdot 17^2 \\ &= 7\,(7M+17^2) \end{aligned}$$

となり，$7M+17^2\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,7)$ ということで，a_n は素因数 7 を 1 つしかもたないため，a_n が平方数となることはありません。

【解 1】

[1]　$1\leqq n\leqq 6$ のとき

$a_1=2024\ (=2^3\cdot 11\cdot 23)$
$a_2=2025\ (=45^2)$
$a_3=2029$ (素数)
$a_4=2047\ (=23\cdot 89)$
$a_5=2143$ (素数)
$a_6=2743\ (=13\cdot 211)$

となり，a_2 のみが平方数である。

[2]　$7\leqq n\leqq 13$ のとき

$a_7=7063=7\cdot 1009$ であり，$1009\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,7)$ より，a_7 は素因数 7 を 1 つしかもたないため，平方数ではない。

以下，合同式の法を 7 とし，$6!\equiv 6$，$17^2\equiv 2$ であることに注意する。

$a_8=7\,(8\cdot 6!+17^2)$ であり，$8\cdot 6!+17^2\equiv 1\cdot 6+2\equiv 1$ であり，a_8 は素因数 7 を 1 つしかもたないため，平方数でない。

$a_9=9!+2023=7\,(9\cdot 8\cdot 6!+17^2)=7\cdot 52129=7^2\cdot 7447$

ここで，$86^2=7396$，$87^2=7569$ で，$86^2<7447<87^2$ なので，7447 は平方数でない。

ゆえに，a_9 は平方数でない。

$a_{10}=7\,(10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2)$ であり，

$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2\equiv 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6+2\equiv 3$$

であり，a_{10} は素因数 7 を 1 つしかもたないため，平方数でない。

$a_{11}=7\,(11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2)$ であり，

$$11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2\equiv 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6+2\equiv 6$$

であり，a_{11} は素因数 7 を 1 つしかもたないため，平方数でない。

$a_{12}=7\,(12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2)$ であり，

$$12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2\equiv 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6+2\equiv 1$$

であり，a_{12} は素因数 7 を 1 つしかもたないため，平方数でない。

$a_{13}=7\,(13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2)$ であり

$$13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 6!+17^2\equiv 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6+2\equiv 3$$

であり，a_{13} は素因数 7 を 1 つしかもたないため，平方数でない。

したがって $7\leqq n\leqq 13$ のとき，a_n が平方数となる n は存在しない。

[3]　$n \geqq 14$ のとき

$n!$ は素因数 7 を 2 つ以上もつため，

$$n! = 7^2 M \ (M \text{ は整数})$$

と表せる。

よって，

$$\begin{aligned} a_n &= 7^2 M + 7 \cdot 17^2 \\ &= 7(7M + 17^2) \end{aligned}$$

$17^2 \equiv 2 \pmod 7$ であるため，$7M + 17^2 \equiv 2 \pmod 7$

ゆえに，a_n は素因数 7 を 1 つしかもたず，a_n は平方数でない。

以上 [1], [2], [3] から ，a_n が平方数となる n は　$n = 2$ … 答

【戦略 2】

平方数を 4 で割った余りが 0，1 に限られるという部分が常識化していると 4 で割った余りに注目することでスッキリ片付きます。

【解 2】

[1]　$1 \leqq n \leqq 3$ のとき

$$a_1 = 2024 \ (= 2^3 \cdot 11 \cdot 23)$$
$$a_2 = 2025 \ (= 45^2)$$
$$a_3 = 2029 \ (\text{素数})$$

であり，平方数は a_2 のみである。

[2]　$n \geqq 4$ のとき

k を正の整数として，$\begin{cases} (2k)^2 \equiv 0 \pmod 4 \\ (2k-1)^2 \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$

であり，平方数を 4 で割った余りは 0，1 に限られる。… (*)

$n \geqq 4$ のときは $n! \equiv 0 \pmod 4$，$2023 \equiv 3 \pmod 4$ であり，

$$a_n = n! + 2023 \equiv 0 + 3 \equiv 3 \pmod 4$$

となり，a_n を 4 で割った余りは 3 となるため，(*) から a_n は平方数とならない。

以上 [1], [2] から，a_n が平方数となる n は　$n = 2$ … 答

【総括】

実験してみて，mod 7 の合同式で捌いていく部分に辿り着くまで色々エネルギーを要すると思います。

a_9 の処理で一瞬ドキッとしますが，冷静に手計算で仕留められる範疇です。

【解 2】は平方剰余に注目する解法ですが，$2023 = 7 \cdot 17^2$ という因数分解が見えていると， 4 を法とする剰余類に注目するのは盲点となりやすいかもしれません。

なお，本問を

$a_n = n! + 2024$ としたとき，a_n が平方数となる正の整数 n を全て求めよ。

という数字に変えると，かなりマイルドになります。

$a_1 = 2025 \ (= 45^2)$
$a_2 = 2026 \ (= 2 \cdot 1013)$ で素因数 2 を 1 つしかもたず平方数でない。
$a_3 = 2030 \ (= 2 \cdot 1015)$ で素因数 2 を 1 つしかもたず平方数でない。
$a_4 = 2048 \ (= 2^{11})$ で平方数でない。
$a_5 = 2144 = 2^5 \cdot 67$ で平方数でない。

$n \geqq 6$ に対して，$n!$ は素因数 2 を 4 つ以上もつため，

$$n! = 2^4 M$$

と表せる。

$$\begin{aligned} a_n &= 2^4 M + 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \\ &= 2^3 (2M + 11 \cdot 23) \end{aligned}$$

$2M + 11 \cdot 23$ は奇数であり，素因数 2 をもたないため，a_n のもつ素因数 2 の個数は 3 個 (奇数個) となるため，a_n は平方数とはならない。

よって，a_n が平方数となる正の整数 n は $n = 1$ のみ。

となります。

◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇　参考　◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

$a_n = n! + 1$ としたとき，a_n が平方数となる正の整数 n を全て求めよ。

という問題は数字的に本問や上でやった問題よりも簡単に思えますが，これはブロカールの問題と呼ばれる未解決問題です。

おそらく，

$a_4 = 25 \ (= 5^2)$，$a_5 = 121 \ (= 11^2)$，$a_7 = 5041 \ (= 71^2)$

のみであることが予想されていますが，完全解決には至っていません。

なお，ABC 予想が真であれば，解は有限個であるということは示されているようです。