２文字の不等式証明【特徴を捉える】

$a \geqq b > 0$ とする。自然数 n に対して，次の不等式を証明せよ。

$$a^n - b^n \leqq \frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$$

＜ '82 名古屋大 ＞

【戦略 1】

独立 2 変数の扱いの最有力候補は「1 つを変数，他を定数」と見る
予選決勝法
です。

どちらを変数と見るかですが，a を固定し，$0<b\leqq$(定数) という限られた範囲で考えたいので，b を変数と見ることにします。

詳しい計算は省略しますが，

$$f(b)=\frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})-(a^n-b^n)$$

と設定すると

$$f'(b)=\frac{n}{2}\{-(n-2)b^{n-1}+a(n-1)b^{n-2}-a^{n-1}\}$$

となります。

もう一発微分すると a^{n-1} の部分が消えることを見越し，$f''(b)$ を計算すると

$$f''(b)=\frac{n}{2}(n-1)(n-2)b^{n-3}\{-b+a\}$$

となります。

$n\geqq 3$ **であれば，**$f''(b)\geqq 0$ **ということになり，**$f'(b)$ **が単調増加ですから**

$0<b\leqq a$ **において，**$f'(b)\leqq f(a)=0$

これより，$f(b)$ **は単調減少で，**$0<b\leqq a$ **において，**$f(b)\geqq f(a)=0$

となり，$f(b)\geqq 0$ **が言えて解決します。**

$n=1$，2 **のときについては最初に個別検証で潰せば** OK **です。**

【解 1】

$\frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})-(a^n-b^n)$ を a を固定して，b の関数と見て

$$\begin{aligned}f(b)&=\frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})-(a^n-b^n)\\&=\frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})+b^n-a^n \quad (0<b\leqq a)\end{aligned}$$

とおく。

[1]　$n=1$ のとき，$f(b)=\frac{1}{2}(a-b)(1+1)+b-a=0$

[2]　$n=2$ のとき，$f(b)=\frac{2}{2}(a-b)(a+b)+b^2-a^2=0$

[3]　$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}f'(b)&=\frac{n}{2}\{(-1)(a^{n-1}+b^{n-1})+(a-b)(n-1)b^{n-2}\}+nb^{n-1}\\&=\frac{n}{2}\{-a^{n-1}-b^{n-1}+a(n-1)b^{n-2}-(n-1)b^{n-1}+2b^{n-1}\}\\&=\frac{n}{2}\{-(n-2)b^{n-1}+a(n-1)b^{n-2}-a^{n-1}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(b)&=\frac{n}{2}\{-(n-2)(n-1)b^{n-2}+a(n-1)(n-2)b^{n-3}\}\\&=\frac{n}{2}(n-1)(n-2)\{-b^{n-2}+ab^{n-3}\}\\&=\frac{n}{2}(n-1)(n-2)b^{n-3}\{-b+a\}\\&\geqq 0\end{aligned}$$

ゆえに，$0<b\leqq a$ の範囲で $f'(b)$ は単調増加。

$$\begin{aligned}f'(a)&=\frac{n}{2}\{-(n-2)a^{n-1}+a(n-1)a^{n-2}-a^{n-1}\}\\&=\frac{n}{2}\{(2-n)a^{n-1}+(n-1)a^{n-1}-a^{n-1}\}\\&=0\end{aligned}$$

これより，$0<b\leqq a$ の範囲で，$f'(b)\leqq f'(a)=0$

ゆえに，$0<b\leqq a$ の範囲で，$f(b)$ は単調減少。

$$\begin{aligned}f(a)&=\frac{n}{2}(a-a)(a^{n-1}+a^{n-1})+a^n-a^n\\&=0\end{aligned}$$

よって，$0<b\leqq a$ の範囲で，$f(b)\geqq f(a)=0$

以上 [1]，[2]，[3] より，$0<b\leqq a$，及び自然数 n に対して $f(b)\geqq 0$，すなわち

$$a^n-b^n\leqq\frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})$$

が成立する。

【戦略 2】

示すべき不等式の両辺の各項の次数が全て n 次という「同次式」ということを見落とさなければ，1 変数の処理で捌けます。

【解 2】

示すべき不等式 $a^n-b^n \leqq \dfrac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$ の両辺を b^n (>0) で割ると

$$\frac{a^n-b^n}{b^n} \leqq \frac{n}{2}\cdot\frac{a-b}{b}\cdot\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{b^{n-1}}$$

すなわち，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n-1 \leqq \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{a}{b}-1\right)\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n-1}+1\right\}$

$\dfrac{a}{b}=t$ とおくと，$0<b\leqq a$ のとき $t\geqq 1$ であり

$$t^n-1 \leqq \frac{n}{2}(t-1)(t^{n-1}+1)$$

右辺を展開すると，$t^n-1 \leqq \dfrac{n}{2}(t^n-t^{n-1}+t-1)$

よって，$t\geqq 1$ に対して

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)t^n-\frac{n}{2}t^{n-1}+\frac{n}{2}t-\frac{n}{2}+1 \geqq 0 \quad \cdots (*)$$

が成り立つことを示せばよい。

$f(t)=\left(\dfrac{n}{2}-1\right)t^n-\dfrac{n}{2}t^{n-1}+\dfrac{n}{2}t-\dfrac{n}{2}+1 \quad (t\geqq 1)$ とおく。

[1]　$n=1$ のとき　$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^1-\dfrac{1}{2}t^0+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}+1=0$

[2]　$n=2$ のとき $f(t)=0-t^1+t-1+1=0$

[3]　$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot nt^{n-1}-\frac{n}{2}(n-1)t^{n-2}+\frac{n}{2} \\ &= \frac{n}{2}\{(n-2)t^{n-1}-(n-1)t^{n-2}+1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{n}{2}\{(n-2)(n-1)t^{n-2}-(n-1)(n-2)t^{n-3}\} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}t^{n-3}(t-1) \\ &\geqq 0 \quad (\because\ n\geqq 3,\ t\geqq 1) \end{aligned}$$

ゆえに，$t\geqq 1$ において，$f'(t)$ は単調増加であり

$$f'(t)\geqq f'(1)=0$$

これより，$t\geqq 1$ において $f(t)$ は単調増加であり

$$f(t)\geqq f(1)=0$$

以上，[1], [2], [3] より 自然数 n，および $t\geqq 1$ を満たす t に対して，$f(t)\geqq 0$，すなわち $(*)$ が成り立つ。

これより，題意は示された。

【戦略 3】

示すべき不等式の右辺から

台形の面積

をインスピレーションすると，視覚化できます。

【解 3】

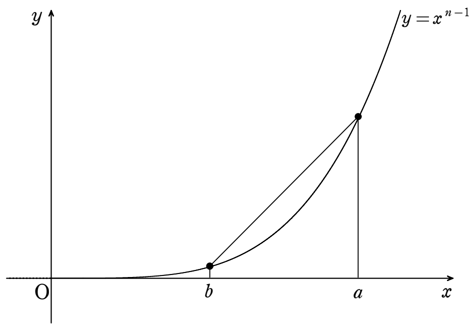
[1]　$n=1$ のとき $\begin{cases} (\text{左辺})=a-b \\ (\text{右辺})=\dfrac{1}{2}(a-b)(a^0+b^0)=a-b \end{cases}$

[2]　$n=2$ のとき $\begin{cases} (\text{左辺})=a^2-b^2 \\ (\text{右辺})=\dfrac{2}{2}(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \end{cases}$

[3]　$n\geqq 3$ のとき

$y=x^{n-1}$ $(x>0)$ に対して，$y'=(n-1)x^{n-2}$，$y''=(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$x>0$，$n\geqq 3$ のとき，$y''>0$ であるから，$x>0$ において $y=x^{n-1}$ は下に凸である。



ゆえに，面積に注目すると，

$$\int_b^a x^{n-1}\,dx \leqq \frac{1}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$$

$$\left[\frac{1}{n}x^n\right]_b^a \leqq \frac{1}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$$

$$\frac{a^n-b^n}{n} \leqq \frac{1}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$$

よって，$a^n-b^n \leqq \dfrac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$

以上，[1], [2], [3] より，題意は示された。

【総括】

独立 2 変数の扱いを重要視しようと思えば【解 1】

同次式が目に付けば【解 2】

作為的な形から視覚化を疑い，台形の面積を疑えば【解 3】

というように，何が目につくかによって様々な解法が考えられます。