a を $a>2$ を満たす実数とし，数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1=a\ ,\ \ x_{n+1}=\frac{{x_n}^2}{2(x_n-1)}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 全ての正の整数 n に対して $x_n>2$ であることを示せ。

(2) 全ての正の整数 n に対して $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ であることを示せ。

(3) $2<a\leqq 3$ のとき，全ての正の整数 n に対して $x_n\leqq 2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$ であることを示せ。

(4) $a>3$ のとき，$n\geqq\dfrac{\log_2\dfrac{a}{3}}{\log_2\dfrac{4}{3}}$ を満たす n に対して $x_{n+1}<3$ であることを示せ。

＜ ’84 高考 ＞

【戦略】

(1) **漸化式が与えられている状況なので，手なりに数学的帰納法を用いる路線で問題ありません。**

(2) **帰納法でもいいですが，自然に差をとっても**

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}-1=\frac{x_n}{2(x_n-1)}-1=\frac{2-x_n}{2(x_n-1)}$$

という形となるため，(1) のおかげですんなり示せます。

(3) **示すべき不等式を** $x_n-2\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ **という形で見れば，**x_n-2 **というものを一つの塊として見たくなるでしょう。**

目指すべきは，$x_{n+1}-2\leqq\dfrac{1}{2}(x_n-2)$ **という等比数列の不等式版みたいなもので，**

$$x_n-2\leqq\frac{1}{2}(x_{n-1}-2)\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-2}-2)\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-2)$$

というようにして，

$$x_n-2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a-2)$$

が得られます。

もう一声，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(a-2)\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ **と押さえたいのですが，条件から** $a\leqq 3$ **であるため，解決です。**

(4) **不思議な条件が与えられていますが，底の 2 は飾りに過ぎず，結局は底の変換公式を逆に見て** $n\geqq\log_{\frac{4}{3}}\dfrac{a}{3}$ **という条件になります。**

ここから，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\geqq\dfrac{a}{3}$ **で，条件も合わせると** $3<a\leqq\dfrac{4^n}{3^{n-1}}$ **ということです。**

(2) より $\{x_n\}$ **が単調減少数列であることが分かっているわけですが，初項** a **が** $3<a\leqq\dfrac{4^n}{3^{n-1}}$ **の範囲に収まっているなら，**n **個先の** x_{n+1} **で 3 を下回ることを示せというのが問題の趣旨です。**

【解答】

(1) $x_n>2$ …① であることを n についての数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき $x_1=a$ であり，条件 $a>2$ より $x_1>2$

ゆえに $n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2] $n=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$x_k>2$ であると仮定する。

このとき，
$$\begin{aligned}x_{k+1}-2&=\frac{{x_k}^2}{2(x_k-1)}-2\\&=\frac{{x_k}^2-4(x_k-1)}{2(x_k-1)}\\&=\frac{(x_k-2)^2}{2(x_k-1)}\\&>0\ \ (\because\ \text{仮定より}\ x_k>2)\end{aligned}$$

ゆえに，$x_{k+1}>2$ が成り立ち，$n=k+1$ のとき ① は成り立つ。

[1], [2] より，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$x_n>2$ が成り立つ。

(2)
$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n}-1&=\frac{x_n}{2(x_n-1)}-1\\&=\frac{x_n-2(x_n-1)}{2(x_n-1)}\\&=\frac{2-x_n}{2(x_n-1)}<0\ \ (\because\ (1)\ \text{より}\ x_n>2)\end{aligned}$$

よって，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$

(3)
$$\begin{aligned}x_{n+1}-2&=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_n-2}{x_n-1}(x_n-2)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{x_n-1}\right)(x_n-2)\\&\leqq\frac{1}{2}(x_n-2)\ \ (\because\ (1)\ \text{より}\ x_n>2)\end{aligned}$$

ゆえに，$x_n-2\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-2)$

今，$2<x_1\leqq 3$ より，$0<x_1-2\leqq 1$ であるため，

$$x_n-2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-2)\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$x_n\leqq 2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つ。

(4) $n \geqq \dfrac{\log_2 \frac{a}{3}}{\log_2 \frac{4}{3}} = \log_{\frac{4}{3}} \dfrac{a}{3}$ のとき，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \geqq \dfrac{a}{3}$

すなわち，$3 < a \leqq \dfrac{4^n}{3^{n-1}}$ である。

示すべきは，$3 < x_1 \leqq \dfrac{4^n}{3^{n-1}} \implies x_{n+1} < 3$ が真である …②

これを n についての数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき

$3 < x_1 \leqq 4$ のとき，$3 < x_1 < 3+\sqrt{3}$ であるため，

${x_1}^2 - 6x_1 + 6 < 0$ を満たし，$\dfrac{{x_1}^2}{2(x_1-1)} < 3$ を満たす。

これより，$3 < x_1 \leqq \dfrac{4^1}{3^{1-1}} \implies x_2 < 3$ は真であり，

$n=1$ のとき ② は正しい。

[2]　$n=k$ $(k=1, 2, \cdots)$ のとき

$3 < x_1 \leqq \dfrac{4^k}{3^{k-1}} \implies x_{k+1} < 3$ が真であると仮定する。

このとき，$3 < x_1 \leqq \dfrac{4^{k+1}}{3^k} \implies x_{k+2} < 3$ が真である …③

ことを示す。

[2−1]　$3 < x_1 \leqq \dfrac{4^k}{3^{k-1}} \left(< \dfrac{4^{k+1}}{3^k} \right)$ のとき

仮定，及び (2) から，$x_{k+2} < x_{k+1} < 3$ で ③ は正しい。

[2−2]　$\dfrac{4^k}{3^{k-1}} < x_1 \leqq \dfrac{4^{k+1}}{3^k}$ のとき

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}x_1 - x_2 &= \frac{3}{4}x_1 - \frac{{x_1}^2}{2(x_1-1)} \\
&= \frac{3x_1(x_1-1) - 2{x_1}^2}{4(x_1-1)} \\
&= \frac{x_1(x_1-3)}{4(x_1-1)} \\
&> 0 \quad (\because\ a > 3 \text{ より } x_1 > 3)
\end{aligned}
$$

すなわち，$x_2 < \dfrac{3}{4}x_1$ であることに注意すると

$\dfrac{4^k}{3^{k-1}} < x_1 \leqq \dfrac{4^{k+1}}{3^k}$ であるため，辺々 $\dfrac{3}{4}$ をかけると

$\dfrac{4^{k-1}}{3^{k-2}} < \dfrac{3}{4}x_1 \leqq \dfrac{4^k}{3^{k-1}}$ で，特に右側の不等式に注目

すると，$x_2 < \dfrac{3}{4}x_1 \leqq \dfrac{4^k}{3^{k-1}}$ であり，$x_2 \leqq \dfrac{4^k}{3^{k-1}}$

[2−2−1]　$x_2 \leqq 3$ のとき，
(2) より $\{x_n\}$ は単調減少数列であるため
$x_{k+2} < x_2 \leqq 3$ となり ③ は正しい。

[2−2−2]　$x_2 > 3$，すなわち $3 < x_2 \leqq \dfrac{4^k}{3^{k-1}}$ のとき

$y_n = x_{n+1}$ と定めることで，

$$3 < y_1 \leqq \frac{4^k}{3^{k-1}} \implies y_{k+1} < 3$$

が真であることを示せばよいが，これは帰納法の仮定から真である。

[2−1]，[2−2−1]，[2−2−2] から ③ は正しい。

つまり，$n=k+1$ のときも ② は正しい。

[1]，[2] より，$n=1, 2, \cdots$ に対して ② は正しいことが示され，題意は示された。

【総括】

(4) の条件の使い方が分からずに右往左往するかもしれません。

心の中では，a を　エー と呼ばず，「スタート」と呼びましょう。

$$3 < (\text{スタート}) \leqq \frac{4^n}{3^{n-1}} \implies n \text{ 個先が } 3 \text{ 未満}$$

と示すべきことを日本語で翻訳すると分かりやすいと思います。

(4) の帰納法の [2−2−2] の中での $y_n = x_{n+1}$ とおくくだりは

x_2 を新たな初項 (スタート) とすると，k 個先の x_{k+2} が 3 未満となる

ということが帰納法の仮定によって保証されるということです。
(このように日本語で翻訳すると帰納法の仮定の使い方も見えてくるでしょう。)

基本的に本問で与えられている漸化式で与えられる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めることはできないため，等式を諦めて不等式評価することが要求されます。

今回は問いになってはいませんが，$2 < a \leqq 3$ のときであれば (1)，(3) から

$2 < x_n \leqq 2 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$ であるため，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ ということが言えます。

このように $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を訊くような問いかけは，日本の入試でもよく見かけます。