有理数の生成と可算性【カルキン・ウィルフ・ツリー】

下の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である。

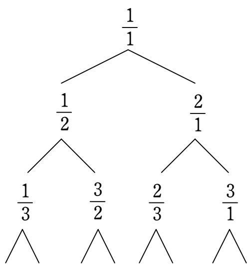
このとき，以下の問いに答えよ。

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ。ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす。

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ。

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ。

(4) $\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ。たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である。



＜ '19 大阪大 ＞

【戦略】

(1) **既約分数 $\dfrac{p}{q}$ から作られる 2 数 $\dfrac{p}{p+q}$，$\dfrac{p+q}{q}$ も既約分数である**

ということが言えれば，スタートの $\dfrac{1}{1}$ が既約分数であることから，

帰納的にこの樹形図に現れる有理数はすべて既約分数ということになります。

よって，p，q が互いに素であるときに，

$$\begin{cases} p+q,\ p \text{ が互いに素} \\ p+q,\ q \text{ が互いに素} \end{cases}$$

ということを示せばよく，互いに素である，すなわち 2 以上の公約数をもたないという否定的な内容の証明となれば背理法ということになります。

(2) **どんな有理数にも辿り着けるか？という下へ下っていく意識よりも**

例えば $\dfrac{5}{3}$ って与えたときに，これはどこから来るのか？という

上へ登っていく意識

が持てるとしめたものです。

結局上へ遡ろうと思ったら，分母・分子のうち大きい方から小さい方を引くという操作を繰り返すことになります。

この操作によってやがて分母・分子のいずれかが 1 となります。

つまり，任意の有理数は上へ遡っていくと $\dfrac{1}{r}$ もしくは $\dfrac{r}{1}$ という形にぶち当たることになるわけです。

$\dfrac{1}{r}$，$\dfrac{r}{1}$ というのはかならずこの樹形図にいますから，任意の有理数に辿り着けるということになり証明完了です。

(3) **$\dfrac{p}{q}$ を計算して $\begin{cases} \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{r}{1} \end{cases}$ の形になるに至る過程は一意的なものです。**

つまり，$\dfrac{p}{q}$ から遡って $\dfrac{1}{r}$ $\left(\text{あるいは } \dfrac{r}{1}\right)$ の形に辿り着くための樹形図のルートは一意的なものになるはずです。

$\dfrac{p}{q}$ が 2 ヵ所以上に現れるとなると，このルートが異なることになり，矛盾します。

(4) **$\dfrac{19}{44}$ を上に遡っていくと**

$$\frac{19}{44} \to \frac{19}{25} \to \frac{19}{6} \to \frac{13}{6} \to \frac{7}{6} \to \frac{1}{6}$$

ということになります。

つまり，$\dfrac{1}{6}$ を基準にしてそこから樹形図を書いていけば，スペースはとるものの，原始的に追っていけます。

【解答】

(1) p，q が正の整数として，$\dfrac{p}{q}$ が既約分数，すなわち p，q が互いに素であるときを考える。

このとき，$p+q$，p が互いに素でないと仮定する。

すると，$\begin{cases} p+q=G_1\alpha_1 \\ p=G_1\beta_1 \end{cases}$ (α_1，β_1 は整数) となる 2 以上の公約数 G_1 が存在する。

よって，$q=G_1\alpha_1-p=G_1(\alpha_1-\beta_1)$ となり，p，q が公約数 G_1 ($\geqq 2$) をもつことになるが，これは p，q が互いに素であることに矛盾。

また，$p+q$，q が互いに素でないと仮定すると同様に

$\begin{cases} p+q=G_2\alpha_2 \\ q=G_2\beta_2 \end{cases}$ (α_2，β_2 は整数) となる 2 以上の公約数 G_2 が存在する。

よって，$p=G_2\alpha_2-q=G_2(\alpha_2-\beta_2)$ となり，p，q が公約数 G_2 ($\geqq 2$) をもつことになるが，これは p，q が互いに素であることに矛盾。

以上から，既約分数 $\dfrac{p}{q}$ から作られる次の 2 数 $\dfrac{p}{p+q}$，$\dfrac{p+q}{q}$ も既約分数となる。

この樹形図は $\dfrac{1}{1}$ ($=$整数) という既約分数からスタートして作られるため，この樹形図に現れる分数はすべて既約分数である。

(2) 有理数 $\dfrac{p}{q}$ を考えるにあたり，$p=q$ のときは $\dfrac{1}{1}$ のときに限るため以下 $p \neq q$ のときを考えることにする。

$$[\mathrm{A}]\quad \frac{p}{q} \longrightarrow \frac{p-q}{q} \quad (\, p>q \text{ のとき} \,)$$

$$[\mathrm{B}]\quad \frac{p}{q} \longrightarrow \frac{p}{q-p} \quad (\, q>p \text{ のとき} \,)$$

これらは既約分数 $\dfrac{p}{q}$ から上の段に遡る操作を表す。

このように分母・分子のうち，大きい方から小さい方を引くという操作を繰り返すことで上の段に遡れる。

この操作 [A]，[B] を繰り返していくと，任意の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ はやがて分母・分子のいずれかは 1 となる。

(例： $\dfrac{14}{3} \to \dfrac{11}{3} \to \dfrac{8}{3} \to \dfrac{5}{3} \to \dfrac{2}{3} \to \dfrac{2}{1}$)

すなわち，

$$\frac{p}{q} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{r}{1} \end{cases} \text{ のいずれか}$$

となる。

任意の正の有理数 $\dfrac{p}{q}$ に対応する r は一意に存在し，$\dfrac{1}{r}$，$\dfrac{r}{1}$ はこの樹形図の左端，右端に必ず現れるため，任意の正の有理数はこの樹形図に現れる。

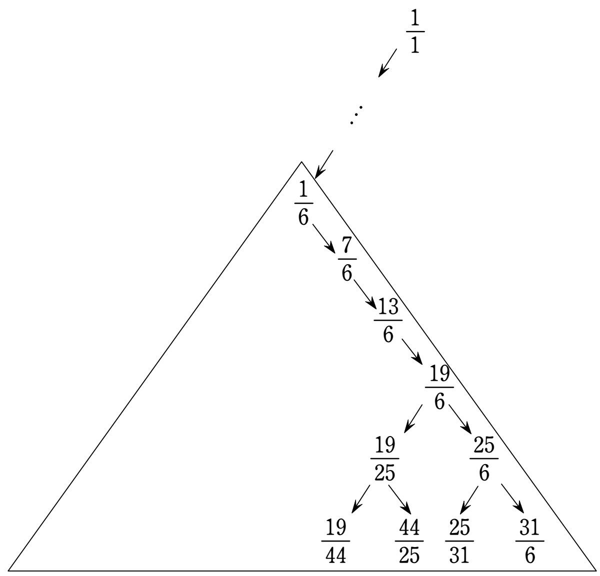
(3) $\dfrac{p}{q}$ から操作 [A]，[B] を用いて $\dfrac{1}{r}$ $\left(\text{または } \dfrac{r}{1}\right)$ まで辿り着く途中経過は一通りしかない。… (*)

もし，$\dfrac{p}{q}$ が樹形図に 2 ヵ所以上現れると仮定すると $\dfrac{p}{q}$ から操作 [A]，[B] を用いて $\dfrac{1}{r}$ $\left(\text{または } \dfrac{r}{1}\right)$ まで辿り着く途中経過が異なることになり，(*) に矛盾する。

ゆえに，$\dfrac{p}{q}$ はこの樹形図において 1 回しか現れず，この樹形図に現れる有理数はすべて異なる。

(4) $\dfrac{19}{44}$ から操作 [A]，[B] を施して上へ辿っていくことを考える。

$$\frac{19}{44} \to \frac{19}{25} \to \frac{19}{6} \to \frac{13}{6} \to \frac{7}{6} \to \frac{1}{6}$$



まず，$\dfrac{1}{6}$ は上から 6 段目であることに注意すると，$\dfrac{19}{44}$ は上から 11 段目ということは確定する。

次に，図の △ の中にある有理数の個数に注目する。

$\dfrac{1}{6}$ が一番左にあることに注意すると，

$\dfrac{19}{44}$ のある段の $\dfrac{31}{6}$ は左から $2^5=32$【番目】なので，

$\dfrac{19}{44}$ は左から $32-3=29$【番目】

以上から，$\dfrac{19}{44}$ は上から 11 段目，左から 29 番目である。… 答

【総括】

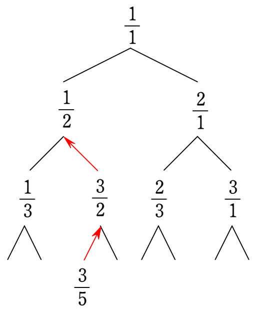
高級な論証を要する本格的な問題です。

下にいくと分岐するが，上に遡るルートは一通りしかないところに注目するのが急所なのですが，中々に厳しいと思います。

例えば $\dfrac{3}{5}$ から上に遡ろうとして，操作 $[\mathrm{A}]$，$[\mathrm{B}]$ をすると

$$\frac{3}{5} \to \frac{3}{2} \to \frac{1}{2}$$

ということになりますが，この計算は



という樹形図を遡る作業に対応するわけです。

なお，本問の樹形図は「カルキン・ウィルフ・ツリー」と呼ばれます。

本問の (2)，(3) の結果から，この樹形図は

正の有理数を漏れなく，重複なく生成するアルゴリズム

ということが言えることになります。

ここからどんなことが言えるのかについて少しだけ考えてみます。

◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇ 参考 ◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

有限集合であれば，その大きさは要素の個数を見れば分かりますが，無限集合に対しては要素の個数は定まらないため，その「大きさ」というべきものが曖昧です。

そこで，カントールという数学者が

濃度

という概念を導入し，無限集合の「大きさ」に相当するものを考えようとしました。

人類が拡張してきた「数」の集合

自然数の集合 $\mathbb{N}$，整数の集合 $\mathbb{Z}$，有理数の集合 $\mathbb{Q}$

実数の集合 $\mathbb{R}$，複素数の集合 $\mathbb{C}$

の要素の個数はどれも無限個ありますが，その無限にも言わばレベルのようなものがあるわけです。

さて，

自然数の集合と正の有理数の集合の要素はどちらが多いでしょうか？

という問いを考えてみます。

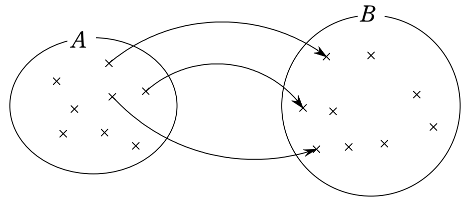
もちろんこの 2 つの集合は無限集合であるため，要素全てを数え尽くすことはできませんから，何を答えたらよいか分からないかもしれません。

そこで，

2 つの無限集合 A，B の要素同士が 1 対 1 に対応する

（専門的には集合 A から集合 B への全単射が存在する）

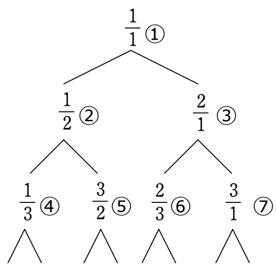
ときに，A，B の「濃度が等しい」と定義します。



「濃度」とはよく言ったもので，無限に要素はあって数え尽くせないものの，粒 (要素) が 1 対 1 に対応していれば「濃さ」は同じだよねというイメージです。

直感的には「なんか正の有理数の方が多そう」と思うかもしれませんが，この 2 つの集合の濃度は等しくなります。

実際に，今回のカルキン・ウィルフ・ツリーによって全ての正の有理数が漏れなく重複なく現れることから



というように

全ての正の有理数と全ての自然数が 1 対 1 に対応する

ということになるからです。

今回のように自然数の集合 $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合を「可算集合」と言います。

実際には，一般の有理数は可算集合ということが言えます。

有理数の可算性については

$\dfrac{p}{q}$ という有理数を $(p,\ q)$ という格子点に対応させる

という方法で示すのが有名です。