半径 2 の円板が x 軸上を正の方向に滑らずに回転するとき，円板上の点 P の描く曲線 C を考える。円板の中心の最初の位置を $(0,\ 2)$，点 P の最初の位置を $(0,\ 1)$ とする。

(1) 円板がその中心のまわりに回転した角を θ とするとき，P の座標は

$$(2\theta-\sin\theta\ ,\ 2-\cos\theta)$$

で与えられることを示せ。

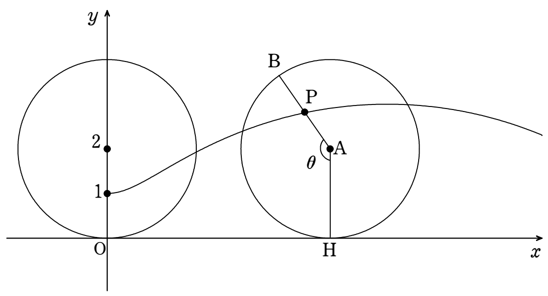
(2) 点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta\ ,\ 2-\cos\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ における曲線 C の法線と x 軸との交点を Q とする。線分 PQ の長さが最大となるような点 P を求めよ。ここで，P において接線に直交する直線を法線という。

(3) 曲線 C と x 軸，2 直線 $x=0$，$x=4\pi$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

＜ ’12 お茶の水女子大 ＞

【戦略】

(1)



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を経由して P の座標を Get しにいくのが常套手段です。

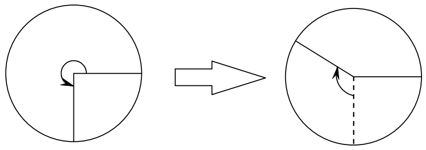
つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と繋いでいくわけですが，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

なので，実質は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が Get できれば解決です。

半径が 2 なので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は回転角が分かれば $\begin{pmatrix}2\cos☆\\2\sin☆\end{pmatrix}$ と表せます。

そしてその角度は，

反時計回りに $\dfrac{3}{2}\pi$ 回転　&　時計回りに θ 回転



と見れば，$\dfrac{3}{2}\pi-\theta$ と分かります。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)\\2\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sin\theta\\-2\cos\theta\end{pmatrix}$ となるため

解決です。

(2) **結局は $\begin{cases}x=2\theta-\sin\theta\\y=2-\cos\theta\end{cases}$ というパラメータ曲線の接線，法線を考えます。**

接線の傾きに相当する $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$ として計算しますが，

これに垂直な法線の傾き $\dfrac{\cos\theta-2}{\sin\theta}$ を考えるにあたっては $\sin\theta=0$ となるときが鬱陶しいので，傾きでなく，方向ベクトルを考えます。

結局接線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}\frac{dx}{d\theta}\\\frac{dy}{d\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ なので，

それに垂直な法線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta-2\end{pmatrix}$ となります。

方向ベクトルが手元にあるので，法線の表現方法を直交座標表示ではなく，ベクトル方程式として表現するのがいいでしょう。

法線上の点 $(x,\ y)$ 集まれ～ → $y=ax+b$（直交座標表示）ではなく

法線上の点 $(x,\ y)$ 集まれ～ → $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta-2\end{pmatrix}$

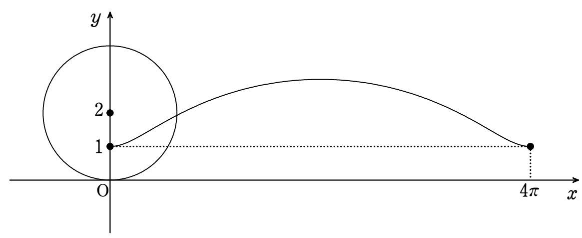
と表現するわけです。

この法線の x 切片を考えるにあたっては，法線上の点でちょうど x 軸にあるような特別な倍率 t を求めればよいので

$y=2-\cos\theta+t(\cos\theta-2)=0$ となるような t，すなわち $t=1$ のときを考えればよく，このとき，x 切片は $2\theta-\sin\theta+\sin\theta=2\theta$ となり，Q の座標が $(2\theta,\ 0)$ と求まります。

この後は手なりに $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ が計算できますので問題ないでしょう。

(3) **一応，この曲線 C の概形を考えると**



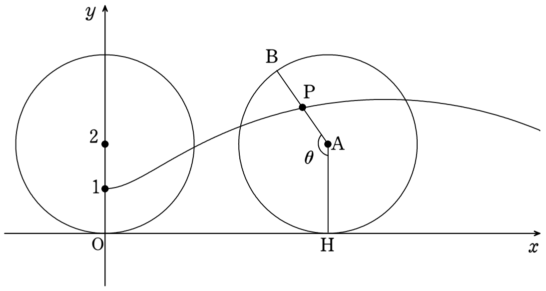
というように，x 軸回転体を考えるにあたっては，回転軸をまたいでいないため，ウルサイことにはなりません。
（まぁ P の y 座標 $2-\cos\theta$ が 1 以上であることから当然と言えば当然ですが…）

パラメータ表示された曲線の x 軸回転体の体積は

$$V=\int_0^{4\pi}\pi y^2dx \quad (\leftarrow \text{まず普通に立式})$$

その後，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\pi y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$ というように見て変数変換（置換積分）をします。

【解答】



(1) 円板の中心を A とし，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}$ なる点 B を考える。

また，A から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると，

$OH=\overset{\frown}{BH}=2\theta$ であるため，$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\theta\\2\end{pmatrix}$

また，$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)\\2\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sin\theta\\-2\cos\theta\end{pmatrix}$

これより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\begin{pmatrix}2\theta\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\sin\theta\\-2\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\theta-\sin\theta\\2-\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は $(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ で与えられる。

(2) 曲線 C は $\begin{cases}x=2\theta-\sin\theta\\y=2-\cos\theta\end{cases}$ というパラメータ表示で与えられる曲線。

$$\frac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

$P(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における接線の方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix}2-\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに，P における法線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}2-\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ に垂直な

$$\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta-2\end{pmatrix}$$

したがって，P における法線上の点 $(x,\ y)$ は実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\overrightarrow{OP}+t\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\theta-\sin\theta\\2-\cos\theta\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表せる。

この法線の x 切片を考えるにあたっては $y=0$ となるような t の値を考えればよく，

$$2-\cos\theta+t(\cos\theta-2)=0$$

すなわち，$t=1$

このときの x の値は $2\theta-\sin\theta+\sin\theta=2\theta$

よって，Q の座標は $(2\theta,\ 0)$

したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\&=\begin{pmatrix}2\theta\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\theta-\sin\theta\\2-\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるため，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2&=(\sin\theta)^2+(\cos\theta-2)^2\\&=5-4\cos\theta\end{aligned}$$

$0<\theta<2\pi$ において，$\theta=\pi$ のとき $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ は最大値 $\sqrt{5-4(-1)}=3$ をとる。

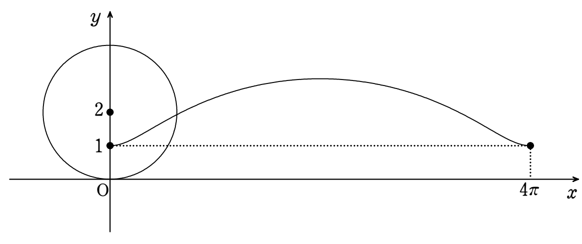
以上から，求める P の座標は $\theta=\pi$ のときを考えて，$(2\pi,\ 3)$ …答

(3) $\dfrac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ より，

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\dfrac{dy}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	0
y	$\cdot$	$\uparrow$	$\cdot$	$\downarrow$	$\cdot$
$\left(\dfrac{dx}{d\theta},\ \dfrac{dy}{d\theta}\right)$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$
$(x,\ y)$	$(0,\ 1)$		$(2\pi,\ 3)$		$(4\pi,\ 1)$

という増減表を得る。

したがって，$\begin{cases}x=2\theta-\sin\theta\\y=2-\cos\theta\end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ というパラメータ表示で与えられる曲線 C の概形は



求める立体の体積を V とすると，

$$V=\int_0^{4\pi}\pi y^2\,dx$$

$$\begin{aligned}&=\pi\int_0^{2\pi}y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^2(2-\cos\theta)\,d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}(8-12\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

ここで，

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{2\pi}=\pi$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta&=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\{\cos\theta-(\sin\theta)^2\cos\theta\}\,d\theta\\&=\Big[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{2\pi}\\&=0\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}V&=\pi\{8\cdot2\pi-12\cdot0+6\cdot\pi-0\}\\&=22\pi^2\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

ある円板を滑らずに転がしたとき，円板の内部，または外部の定点の軌跡をトロコイドと言います。
(ちょうど円板の境界線上の点の場合，サイクロイドになります。)

基本的には，サイクロイドに準ずるような態度で式を Get することになります。

本問は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と縮めましたが，縮める(あるいは伸ばす)倍率によってはグラフの概形が色々異なってきますので，何題か経験を積み，ある程度のシナリオを固めておきましょう。