両端をP，Qとする長さk $(k>1)$ の棒を，その一端Pが半径1の円板の中心に一致するように，棒を円板に貼り付ける。この棒のついた円板を棒の両端P，Qがそれぞれ$(0, 1)$，$(0, 1-k)$に一致するようにxy平面上におき，その円板の周がx軸上を滑ることなく，x軸の正の向きに転がるように円板を転がすとき，Qは下図のような曲線Cを描く。

次の問いに答えよ。

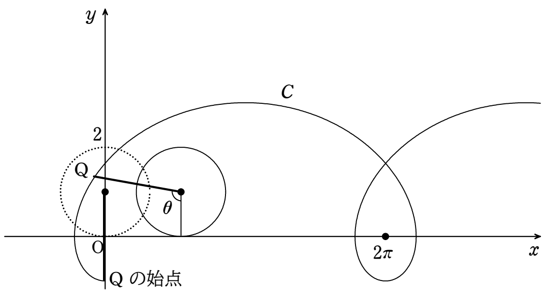
(1) 円板が角θだけ回転したときの点Qの座標を(x, y)とすると，

$$x=\theta-k\sin\theta,\ y=1-k\cos\theta$$

と表せることを示せ。

(2) 円板が一定の速さで転がるとき，点Qの速さが最大となるときのθを求めよ。

(3) $k=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，この曲線Cとy軸で囲まれる部分の面積を求めよ。



＜ ’98 横浜国立大 ＞

【戦略】

(1) **例題同様，境界上の点Rを設定し，$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PR}$ という部分からQに辿り着きたいと思います。**

(2) **円板が一定の速度で転がるということは，時刻tに対する角速度$\dfrac{d\theta}{dt}$が一定値ということです。**

そこで，$\dfrac{d\theta}{dt}=\omega$ とすることで，点Qの時刻tにおける速度ベクトル$\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$の大きさである$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ を計算していきます。

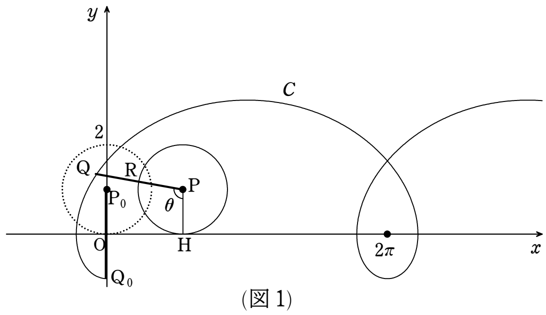
(3) **気になるのはy切片であり，$x=0$，すなわち$\theta-\dfrac{\pi}{3}\sin\theta=0$となる$\theta$の値です。これについては，どちらかというと探すという態度に近いでしょう。**

$\theta-\dfrac{\pi}{3}\sin\theta=0$ **を満たす** $\theta\,(>0)$ **の値は** $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ **となりますから，後は**

$$S=\int_{1-\frac{\pi}{3}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}-x\,dy$$

から，$S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}-x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$ **と，変数変換(置換積分)で仕留めます。**

【解答】



(図1)

(1) $P_0(0, 1)$，$Q_0(0, 1-k)$とする。

角度θ回転したときの円板の中心Pからx軸に下ろした垂線の足をH，線分PQと円板の境界線との交点をRとする。

このとき，$|\overrightarrow{PR}|=1$より，$\overrightarrow{PQ}=k\,\overrightarrow{PR}$である。

ここで，$OH=\overset{\frown}{RH}=\theta$であるため，$P(\theta, 1)$

$$\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)\\ \sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$ であるため

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\\ &=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PR}\\ &=\begin{pmatrix}\theta\\ 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\theta-k\sin\theta\\ 1-k\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，円板がθ回転したときのQの座標(x, y)に対して

$$\begin{cases}x=\theta-k\sin\theta\\ y=1-k\cos\theta\end{cases}$$

が成り立つ。

(2) 条件より，時刻tに対して，円板の角速度$\dfrac{d\theta}{dt}$が一定であり，

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega\ (\omega\text{は正の定数})$$

とする。

このとき，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\omega(1-k\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\omega k\sin\theta$$

ゆえに，点Qの時刻tにおける速さは

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}&=\sqrt{\omega^2\{(1-k\cos\theta)^2+k^2\sin^2\theta\}}\\ &=\omega\sqrt{k^2+1-2k\cos\theta}\end{aligned}$$

$k>1$より，$\cos\theta=-1$のときに点Qの速さは最大となる。

この円板はx軸正の向きに転がるため，求めるθはnを正の整数として $\theta=(2n-1)\pi$ …答

(3)　曲線 C : $\begin{cases} x=\theta-\dfrac{\pi}{3}\sin\theta \\ y=1-\dfrac{\pi}{3}\cos\theta \end{cases}$ $(\theta\geqq 0)$ と y 軸との交点について考える。

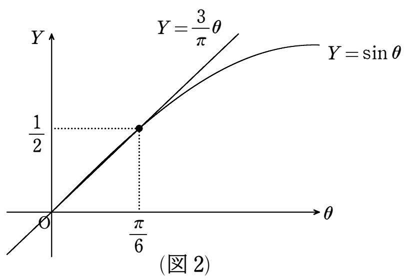
$x=0$ となるときの θ は，$\theta-\dfrac{\pi}{3}\sin\theta=0$

すなわち $\dfrac{3}{\pi}\theta=\sin\theta$ を満たす。

ここで，$Y=\dfrac{3}{\pi}\theta$，$Y=\sin\theta$ のグラフを考える。

(図 2) に注意すると，$\theta>0$ の範囲で $\dfrac{3}{\pi}\theta=\sin\theta$ を満たす θ は

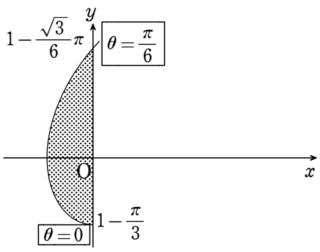
$$\theta=\frac{\pi}{6}$$



(図 2)

ゆえに，求める面積を S とすると

$$S=\int_{1-\frac{\pi}{3}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}-x\,dy$$



$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}-x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$$

$$=-\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)\cdot\frac{\pi}{3}\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\theta\sin\theta\,d\theta+\frac{\pi^2}{9}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int\theta\sin\theta\,d\theta&=\int\theta(-\cos\theta)'\,d\theta\\&=-\theta\cos\theta-\int(-\cos\theta)\,d\theta\\&=-\theta\cos\theta+\sin\theta+C\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\sin^2\theta\,d\theta&=\int\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}S&=-\frac{\pi}{3}\Big[-\theta\cos\theta+\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi^2}{9}\left[\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=-\frac{\pi}{3}\cdot\left\{-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right\}+\frac{\pi^2}{18}\left\{\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\\&=\frac{1}{108}\pi^3+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi^2-\frac{1}{6}\pi\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

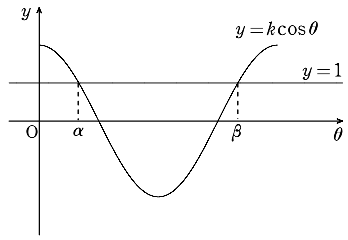
本問は円の外側にある定点の軌跡を考えるバージョンです。

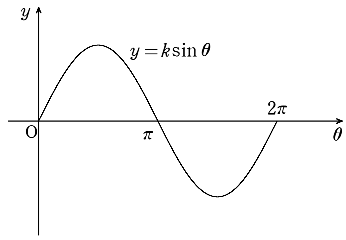
$k>1$ としたとき，$\begin{cases} x=\theta-k\sin\theta \\ y=1-k\cos\theta \end{cases}$ の概形を考えてみます。

ひとまず θ を $0\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲で考えてみると

$$\frac{dx}{d\theta}=1-k\cos\theta\ ,\quad \frac{dy}{d\theta}=k\sin\theta$$

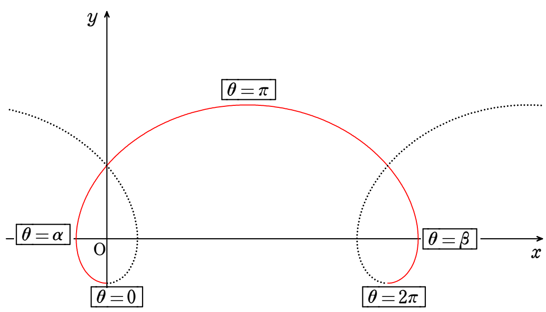
ですから，





θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
x	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\cdot$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\cdot$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
$\dfrac{dy}{d\theta}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	$\cdot$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdot$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdot$
$\left(\dfrac{dx}{d\theta},\dfrac{dy}{d\theta}\right)$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$
(x,y)									

というような増減表を得るため，



という概形になります。