2つの正の整数 a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L とするとき，

$$L^2-G^2=72$$

が成り立つ。このような正の整数の組 $(a，b)$ をすべて求めよ。

＜ '21 横浜市立大 ＞

【戦略 1】

ひとまず，L，G は多少手際が悪くなったとしても

解ける形

だということを心の支えにしたいところです。

$$(L+G)(L-G)=2^3\cdot 3^2$$

と積の形を作り，約数を拾っていきます。

$L+G>0$ ですから，(負の整数)×(負の整数) という場合は削れます。

さらに，$L+G>L-G$ であることを考えると，9×8，8×9 のうち片方のみを考えればよいということで，さらに省エネ出来ます。

これにより，

$L+G$	72	36	24	18	12	9
$L-G$	1	2	3	4	6	8

となります。

ここからしらみつぶしに全てのケースを考えてもいいですが，もう少し省エネします。

$L+G$ と $L-G$ の和である $(L+G)+(L-G)$ は，

$$(L+G)+(L-G)=2L\ (\ =\text{偶数}\ )$$

です。

足して偶数ということは，

(偶数)＋(偶数) または (奇数)＋(奇数)

という場合に限られることから

$L+G$，$L-G$ の偶奇は一致する

ということになり，

$L+G$	36	18	12
$L-G$	2	4	6

とさらに絞られます。

ここから，$(L，G)=(19，17)，(11，7)，(9，3)$ が得られます。

ただ，$\begin{cases} a=G\alpha \\ b=G\beta \end{cases}$ (α，β は互いに素な正の整数) **とおいたとき**

$$L=G\alpha\beta$$

という関係式が成り立っていることを考えると，

L は G の倍数

ということですから，$(L，G)=(9，3)$ しかあり得ません。

あとは，$9=3\alpha\beta$ で，$\alpha\beta=3$ ですから，再び約数を拾って

$$(\alpha，\beta)=(1，3)，(3，1)$$

として $\begin{cases} a=3\alpha \\ b=3\beta \end{cases}$ **に代入すればオシマイです。**

【解 1】

a，b の最大公約数が G なので，

$$\begin{cases} a=G\alpha \\ b=G\beta \end{cases} (\alpha，\beta \text{ は互いに素な正の整数}) \cdots ①$$

とおける。

このとき，$L=G\alpha\beta$ …② である。

さて，条件より

$$(L+G)(L-G)=2^3\cdot 3^2$$

であり，$L+G>L-G>0$ であることに注意すると

$L+G$	72	36	24	18	12	9
$L-G$	1	2	3	4	6	8

このうち，$(L+G)+(L-G)=2L$ (＝偶数) なので

$L+G$，$L-G$ の偶奇は一致する。

したがって

$L+G$	36	18	12
$L-G$	2	4	6

これより，$(L，G)=(19，17)，(11，7)，(9，3)$

② より，L は G の倍数であるため，$(L，G)=(9，3)$ で，これを ② に代入すると

$$9=3\alpha\beta$$

これより，$\alpha\beta=3$ を得て，$(\alpha，\beta)=(1，3)，(3，1)$

① より，$\begin{cases} a=3\alpha \\ b=3\beta \end{cases}$ であるから，$(a，b)=(3，9)，(9，3)$ …答

【戦略 2】

$\begin{cases} a=G\alpha \\ b=G\beta \end{cases}$ (α, β は互いに素な正の整数) **とおいたときに**

$$L=G\alpha\beta$$

となりますが，これを与えられた $L^2-G^2=72$ に代入すると

$$\alpha^2\beta^2G^2-G^2=72$$

ですから，

$$(\alpha^2\beta^2-1)G^2=72$$

となります。

G^2 は 72 の約数でもあり，平方数でもあるため，候補がかなり限定的になり，そこから絞っていくこともできます。

解答では，$\alpha^2\beta^2-1=\dfrac{72}{G^2}$ と

$$(\textbf{整数})=(\textbf{分数})$$

の形を作り，

「G^2 よ，お前は 72 の約数だ」

と分母を睨む記述をした方が明確です。

【解 2】

a, b の最大公約数が G なので，

$$\begin{cases} a=G\alpha \\ b=G\beta \end{cases} (\alpha,\ \beta \text{ は互いに素な正の整数}) \cdots ①$$

とおける。

このとき，$L=G\alpha\beta$　である。

このとき，$L^2-G^2=72$ という条件より $(G\alpha\beta)^2-G^2=72$

すなわち，

$$\alpha^2\beta^2-1=\frac{72}{G^2}\ \cdots ②$$

で，$\dfrac{72}{G^2}$ は整数となるため，G^2 は 72 の正の約数である。

72 の正の約数 1，2，3，4，6，8，9，12，18，24，36，72 のうち

平方数は 1，4，9，36

ゆえに，$G^2=1$，4，9，36 であり，② より

$$(\alpha^2\beta^2,\ G^2)=(73,\ 1),\ (19,\ 4),\ (9,\ 9),\ (3,\ 36)$$

$\alpha^2\beta^2$ も平方数であることを考えると，$(\alpha^2\beta^2,\ G^2)=(9,\ 9)$

$\alpha>0$，$\beta>0$，$G>0$ より，$(\alpha\beta,\ G)=(3,\ 3)$

$\alpha\beta=3$ より，$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$

① より，$\begin{cases} a=3\alpha \\ b=3\beta \end{cases}$ であるから，$(a,\ b)=(3,\ 9)$，$(9,\ 3)$ … 答

【総括】

恐らく，多くの人が，$(L+G)(L-G)=72$ の形を作り，約数を拾っていくことで，

L，G は出せる

というところから攻め落とそうとするのではないでしょうか。

試験場ではそのような泥臭い態度も正義です。

【解 2】は平方数であることを存分に活かして絞り込みましたが，戦略的に気がつくというよりも，観察力の問題です。

なお，a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L としたときの代表的な関係式

① $L=G\alpha\beta$ ただし，$\begin{cases} a=G\alpha \\ b=G\beta \end{cases}$ (α, β は互いに素な正の整数)

② $ab=GL$

については押さえておきましょう。

【① について】

L は a の倍数なので，$L=G\alpha\times$(整数) という形で書ける

L は b の倍数なので，$L=G\beta\times$(整数) という形で書ける

ということから，

$L=G\alpha\beta\times$(整数) という形で表される

ということになり，この形の整数の中で最小のものが L なので

$$L=G\alpha\beta$$

が得られます。

【② について】

① において，両辺 G をかけると，

$$GL=G\alpha\cdot G\beta$$

となり，$GL=ab$ がただちに従います。