$p=\dfrac{2^{148}+1}{17}$ は整数である。p は何桁の整数か答えよ。
ただし，$0.301<\log_{10}2<0.302$ である。

＜ ’06 宮崎大 ＞

【戦略 1】

p を具体的に計算することは手計算では実質無理筋ですし，この形のまま常用対数をとっても $+1$ や $\dfrac{}{17}$ の部分の処理で困ります。

そこで，等式を諦めて不等式評価に走ります。

p を $2^{\square}$ という形で評価したいという気持ちをもち，

$$2^{\bigcirc}<p<2^{\triangle}$$

という形で挟むことを考えます。

p を大きくしようと思うと，

分母を $\dfrac{}{17}$ から，$\dfrac{}{16}=\dfrac{}{2^4}$ と小さくする

分子を $\dfrac{2^{148}+1}{}$ から，$\dfrac{2^{149}}{}$ と大きくする

とするのがよいでしょうか。

つまり，$p<\dfrac{2^{149}}{16}=2^{145}$ と評価できます。

反対に p を小さくしようと思うと，

分母を $\dfrac{}{17}$ から，$\dfrac{}{32}=\dfrac{}{2^5}$ と大きくする

分子を $\dfrac{2^{148}+1}{}$ から，$\dfrac{2^{148}}{}$ と小さくする

として，$\dfrac{2^{148}}{2^5}<p$，すなわち $2^{143}<p$ とすることになるでしょう。

これにより，$2^{143}<p<2^{145}$ と p を評価できました。

あとは常用対数をとって，$143\log_{10}2<\log_{10}p<145\log_{10}2$

とするわけですが，今回は $\log_{10}2$ が近似値ではなく，

$$0.301<\log_{10}2<0.302$$

という評価値で不等式として与えられています。

そこで，$143\cdot 0.301<143\log_{10}2<\log_{10}p<145\log_{10}2<145\cdot 0.302$

すなわち，$43.043<\log_{10}p<43.79$ とすれば，$43<\log_{10}p<44$ と挟めるため

$$10^{43}<p<10^{44}$$

を得て解決します。

【解 1】

$\dfrac{2^{148}+1}{17}<\dfrac{2^{149}}{16}=2^{145}$ より，$p<2^{145}$

一方，$\dfrac{2^{148}}{32}<\dfrac{2^{148}+1}{17}$ より，$2^{143}<p$

つまり，$2^{143}<p<2^{145}$ であり，辺々常用対数をとると

$$143\log_{10}2<\log_{10}p<145\log_{10}2 \quad \cdots ①$$

ここで，$\begin{cases}143\cdot 0.301<143\log_{10}2\\145\log_{10}2<145\cdot 0.302\end{cases}$，すなわち $\begin{cases}43.043<143\log_{10}2\\145\log_{10}2<43.79\end{cases}$ $\cdots ②$

①，② より，$43.043<\log_{10}p<43.79$

これより，$43<\log_{10}p<44$ なので，$10^{43}<p<10^{44}$ を得る。

よって，p は 44 桁 … 答

【戦略 2】

$10^{\bigcirc} < p < 10^{\square}$ **という形で挟みたいという気持ちも自然なものでしょう。**

そこで，$2^{148} = 17p - 1$ **という形で見て**

$$\log_{10}(17p-1) = 148\log_{10}2$$

としてから，与えられた $\log_{10}2$ **の不等式を利用してやると**

$$148\cdot 0.301 < 148\log_{10}2 < 148\cdot 0.302$$

となり，$44.548 < \log_{10}(17p-1) < 44.696$**，すなわち**

$$10^{44.548} < 17p - 1 < 10^{44.696}$$

を得ます。

これにより，$\dfrac{10^{44.548}+1}{17} < p < \dfrac{10^{44.696}+1}{17}$ **と** p **が挟めます。**

この最左辺，最右辺がどの程度の数なのか，手計算できる範囲で評価すると，

最左辺については，$\dfrac{10^{44.5}}{17} < \dfrac{10^{44.548}+1}{17}$

最右辺については $\dfrac{10^{44.696}+1}{17} < \dfrac{10^{45}}{17}$

とでも評価すればよいでしょう。

【解 2】

$2^{148} = 17p - 1$ より，$\log_{10}(17p-1) = 148\log_{10}2$

$0.301 < \log_{10}2 < 0.302$ より，$148\cdot 0.301 < 148\log_{10}2 < 148\cdot 0.302$

ゆえに，$44.548 < \log_{10}(17p-1) < 44.696$ を得る。

したがって，$10^{44.548} < 17p - 1 < 10^{44.696}$，すなわち

$$\frac{10^{44.548}+1}{17} < p < \frac{10^{44.696}+1}{17} \quad \cdots ①$$

を得る。

ここで，$\dfrac{10^{44.5}}{17} < \dfrac{10^{44.548}+1}{17}$ より，$\dfrac{10\cdot 10^{\frac{1}{2}}}{17}\times 10^{43} < \dfrac{10^{44.548}+1}{17}$

すなわち，$\dfrac{10\sqrt{10}}{17}\times 10^{43} < \dfrac{10^{44.548}+1}{17}$

さらに，$\dfrac{10\sqrt{10}}{17} > 1$ より，$10^{43} < \dfrac{10\sqrt{10}}{17}\times 10^{43}\left(< \dfrac{10^{44.548}+1}{17}\right) \cdots ②$

一方，

$$10^{45} - 10^{44.696} = 10^{44.696}(10^{0.304}-1) > 10^{44}(10^{\log_{10}2}-1) = 10^{44}(2-1) > 1$$

ゆえに，$10^{44.696}+1 < 10^{45}$ であり，

$$\begin{aligned} \frac{10^{44.696}+1}{17} &< \frac{10^{45}}{17} \\ &= \frac{10}{17}\times 10^{44} \\ &< 10^{44} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

①，②，③ より，$10^{43} < p < 10^{44}$ であり，p は 44 桁 …答

【総括】

どこかで等式を諦め，不等式評価に走る必要性が出てきます。

評価の手際を鍛えるよい訓練となる問題です。

機械的な桁数計算しか練習していないと，ボディーブローのように「ウッ」となりそうですね。