m を正の整数とし，袋の中に赤球 3 個，白球 m 個が入っている。
A，B の 2 人が A の手番からスタートし，交互に袋の中から無作為に球を 1 個ずつ取り出していく。ただし，取り出した球は元に戻さない。
最後の赤球を取った方を勝ちとするとき，A が勝つ確率を求めよ。

＜自作＞

【戦略 1】

A の手番は奇数回目であるため，最短で A の勝ちで決着がつくのは 3 回目です。

最長どこまであり得るかを考えてみます。

このゲームは $m+3$ 回以内には必ず決着がつきます。

そうなると，$m+3$ の偶奇，ひいては m の偶奇によりどこまで長引くかが変わってきます。

ここは m の偶奇で変わる

A が $2k+1$ 回目（$k=1，2，\cdots\cdots，○$）で勝つ

確率を考え，$\sum_{k=1}^{○}$ と $\sum$ してやればよいでしょう。

これについては

1回目　3回目　$2k+1$ 回目　○回目

A　B　A　B　……　A　B　……　A　B

赤

ここの $2k$ 回で赤が 2 個並ぶ　　**ここは白が並ぶしかない**

というイメージがもてれば $\dfrac{{}_{2k}\mathrm{C}_2}{{}_{m+3}\mathrm{C}_3}$ と即立式できるはずです。

【解 1】

[1]　m が奇数のとき

$m=2M-1$（$M=1，2，\cdots$）とおくと，$m+3=2M+2$ より，$2M+2$ 回以内に決着がつく。

A の手番は奇数回目であるため，A が勝つ可能性は

3 回目，5 回目，…，$2M+1$ 回目

のいずれかである。

A が $2k+1$（$k=1，2，\cdots，M$）回目で勝つような球の取り出し方はそれ以前の $2k$ 回の操作で赤が 2 個取り出される取り出し方であり

$${}_{2k}\mathrm{C}_2=\frac{2k(2k-1)}{2}=2k^2-k \text{【通り】}$$

1回目　3回目　$2k+1$ 回目　$2M+1$ 回目

A　B　A　B　……　A　B　……　A　B

赤

ここの $2k$ 回で赤が 2 個並ぶ　　ここは白が並ぶしかない

球の取り出し方の総数は ${}_{m+3}\mathrm{C}_3$【通り】であるため，A が勝つ確率は

$$\sum_{k=1}^{M}\frac{2k^2-k}{{}_{m+3}\mathrm{C}_3}=\frac{6}{(m+3)(m+2)(m+1)}\sum_{k=1}^{M}(2k^2-k)$$

$$=\frac{6}{(m+3)(m+2)(m+1)}\left\{2\cdot\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}-\frac{M(M+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{6}{(m+3)(m+2)(m+1)}\cdot\frac{M(M+1)}{6}\{2(2M+1)-3\}$$

$$=\frac{M(M+1)(4M-1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\quad\cdots(☆)$$

$$=\frac{\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+3}{2}\cdot(2m+1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\quad\left(\because\ m=2M-1 \text{ より } M=\frac{m+1}{2}\right)$$

$$=\frac{2m+1}{4(m+2)}$$

[2]　m が偶数のとき

$m=2M$（$M=1，2，\cdots$）とおくと，$m+3=2M+3$ より $2M+3$ 回以内に決着がつく。

A の手番は奇数回目であるため，A が勝つ可能性は

3 回目，5 回目，…，$2M+3$ 回目

のいずれかである。

A が $2k+1$（$k=1，2，\cdots，M+1$）回目で勝つような球の取り出し方は，それ以前の $2k$ 回の操作で赤が 2 個取り出される取り出し方であり

$${}_{2k}\mathrm{C}_2=\frac{2k(2k-1)}{2}=2k^2-k \text{【通り】}$$

1回目　3回目　$2k+1$ 回目　$2M+3$ 回目

A　B　A　B　……　A　B　……　A　B

赤

ここの $2k$ 回で赤が 2 個並ぶ　　ここは白が並ぶしかない

球の取り出し方の総数は ${}_{m+3}\mathrm{C}_3$【通り】であるため，A が勝つ確率は

$$\sum_{k=1}^{M+1}\frac{2k^2-k}{{}_{m+3}\mathrm{C}_3}=\frac{(M+1)(M+2)(4M+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}$$

[1] の (☆) という結果を拝借し M を $M+1$ とすればよい

$$=\frac{\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+4}{2}\cdot(2m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\quad\left(\because m=2M \text{ より } M=\frac{m}{2}\right)$$

$$=\frac{(m+4)(2m+3)}{4(m+3)(m+1)}$$

以上 [1], [2] から，A が勝つ確率は

$$\begin{cases} m \text{ が奇数のとき } \dfrac{2m+1}{4(m+2)} \\ m \text{ が偶数のとき } \dfrac{(m+4)(2m+3)}{4(m+3)(m+1)} \end{cases}\cdots\text{答}$$

【戦略 2】

途中経過は関係なく，最後の赤球を取れるかどうかが問題です。

決着が付く前は $\begin{cases}\text{赤 3 個}\\ \text{赤 2 個}\\ \text{赤 1 個}\end{cases}$ という状態しかありえませんから，n 回（n 個）球を取り出したときに袋の中の赤球が 3 個，2 個，1 個 となっている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおき，それぞれ求めていくことにします。

赤 3 個というケースは白を取り続けるだけなので，最も考えやすく，すぐに求まるでしょう。

赤 2 個というケースは

$k-1$ 回目までは赤 3 個（確率 a_{k-1}）で，k 回目で 2 個となり，残り $n-k$ 回白を取る

という確率を $\sum$ すればよいでしょう。これにより b_n は解決です。

赤 1 個というケースは

$k-1$ 回目終了時に赤 2 個（確率 b_{k-1}）で，k 回目で 1 個となり残り $n-k$ 回白を取る

という確率を $\sum$ すればよく，これで c_n も解決です。

さて，このゲームは $m+3$ 個の球があるわけですから，最大 $m+3$ 回目に決着がつくわけです。

A が球を取るのは

1 回目，3 回目，…，

というように奇数回目です。

これにより，m の偶奇により最大何回目まで長引くかが変わってきます。

したがって，m の偶奇による場合分けが発生しますが，いずれにせよ

偶数回目が終わった（B が球を取り終わった）段階で袋の中の赤球が 1 個で，その直後に A が赤を取る

というように仕留めることができます。

【解 2】

n 回球を取り出したとき，袋の中の赤球が 3 個，2 個，1 個となっている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。$(0\leqq n\leqq m+3)$

＜ a_n について＞

n 回目の球を取り出し終えたとき，袋の中の赤球が 3 個とは

n 回全て白を取る

ということであり

$$a_n=\overbrace{\frac{m}{m+3}\times\frac{m-1}{m+2}\times\cdots\cdots\times\frac{m-(n-1)}{m+3-(n-1)}}^{n\text{ 個}}$$

$$=\frac{{}_m\mathrm{P}_n}{{}_{m+3}\mathrm{P}_n}$$

$$=\frac{\dfrac{m!}{(m-n)!}}{\dfrac{(m+3)!}{\{(m+3)-n\}!}}$$

$$=\frac{m!}{(m-n)!}\times\frac{(m-n+3)!}{(m+3)!}$$

$$=\frac{(m-n+3)(m-n+2)(m-n+1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}$$

＜ b_n について＞

n 回目の球を取り出し終えたとき，袋の赤球が 2 個とは

k 回目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に 1 個目の赤球を取り出し，その後 $n-k$ 回白球を取り続ける …①

という場合である。

① とは

$k-1$ 回目までは白を取り続ける（この時点で袋の中は $\begin{cases}\text{赤 3 個}\\ \text{白 } m-(k-1)\text{ 個}\\ \text{合計 } m-k+4\text{ 個}\end{cases}$）

k 回目は赤を取る（この時点で袋の中は $\begin{cases}\text{赤 2 個}\\ \text{白 } m-(k-1)\text{ 個}\\ \text{合計 } m-k+3\text{ 個}\end{cases}$）

残り $n-k$ 回は白を取り続ける

① の確率を p_k とすると

$$p_k=a_{k-1}\times\frac{3}{m-k+4}\times\frac{{}_{m-k+1}\mathrm{P}_{n-k}}{{}_{m-k+3}\mathrm{P}_{n-k}}$$

$$=\frac{(m-k+4)(m-k+3)(m-k+2)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{3}{m-k+4}\times\frac{\dfrac{(m-k+1)!}{(m-n+1)!}}{\dfrac{(m-k+3)!}{(m-n+3)!}}$$

$$=\frac{3(m-k+3)(m-k+2)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{(m-k+1)!}{(m-n+1)!}\times\frac{(m-n+3)!}{(m-k+3)!}$$

$$=\frac{3(m-k+3)(m-k+2)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{(m-n+3)(m-n+2)}{(m-k+3)(m-k+2)}$$

$$=\frac{3(m-n+3)(m-n+2)}{(m+3)(m+2)(m+1)}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^{n}p_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(m-n+3)(m-n+2)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\\&=\frac{3n(m-n+3)(m-n+2)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\end{aligned}$$

＜ c_n について＞

n 回目の球を取り出し終えたとき，袋の赤球が 1 個とは
　k 回目 $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ に 2 個目の赤球を取り出し，
　その後 $n-k$ 回白球を取り続ける …②
という場合である。

② とは

最初の $k-1$ 回の内訳が $\begin{cases}\text{赤 1 回}\\\text{白 } k-2 \text{ 回}\end{cases}$ （この時点で袋の中は $\begin{cases}\text{赤 2 個}\\\text{白 } m-(k-2) \text{ 個}\\\text{合計 } m-k+4 \text{ 個}\end{cases}$ ）

k 回目は赤を取る（この時点で袋の中は $\begin{cases}\text{赤 1 個}\\\text{白 } m-(k-2) \text{ 個}\\\text{合計 } m-k+3 \text{ 個}\end{cases}$ ）

残りの $n-k$ 回は白を取り続ける

② の確率を q_k とすると

$$\begin{aligned}q_k&=b_{k-1}\times\frac{2}{m-k+4}\times\frac{{}_{m-k+2}\mathrm{P}_{n-k}}{{}_{m-k+3}\mathrm{P}_{n-k}}\\&=\frac{3(k-1)(m-k+4)(m-k+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{2}{m-k+4}\times\frac{\dfrac{(m-k+2)!}{(m-n+2)!}}{\dfrac{(m-k+3)!}{(m-n+3)!}}\\&=\frac{6(k-1)(m-k+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{(m-k+2)!}{(m-n+2)!}\times\frac{(m-n+3)!}{(m-k+3)!}\\&=\frac{6(k-1)(m-k+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{m-n+3}{m-k+3}\\&=\frac{6(k-1)(m-n+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}c_n&=\sum_{k=2}^{n}q_k\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{6(k-1)(m-n+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\\&=\frac{6(m-n+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\sum_{k=2}^{n}(k-1)\\&=\frac{6(m-n+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\{1+2+\cdots+(n-1)\}\\&=\frac{6(m-n+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{3n(n-1)(m-n+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\end{aligned}$$

[1]　m が奇数のとき $m=2M-1$ $(M=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。

$2k$ 回終了後（このとき手番は A）に袋の中の赤球が 1 個であり，
$2k+1$ 回目に A が赤球を取って勝ちが確定する確率について考える。

2 回終了後に赤球が 1 個となり，その直後 A が赤球を取って勝ちが確定するのが最短。

球は全部で $m+3=(2M-1)+3=2M+2$ 個あるため，$2M+2$ 回以内の操作で必ず決着はつく。

したがって，$2M$ 回終了後に赤球が 1 個であり，$2M+1$ 回目に A が赤球を取って勝ちが確定するのが最長。

ゆえに，k の範囲は $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M$ …$(*)$

さて，$2k$ 回終了後に袋の中の赤球が 1 個となっている確率は c_{2k}

このとき袋の中は $\begin{cases}\text{赤 1 個}\\\text{白 } m+2-2k \text{ 個}\\\text{合計 } m+3-2k \text{ 個}\end{cases}$

この状態から A が赤を取れば A の勝ちとなり，その確率は

$$\begin{aligned}c_{2k}\times\frac{1}{m-2k+3}&=\frac{3\cdot2k(2k-1)(m-2k+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{1}{m-2k+3}\\&=\frac{6k(2k-1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\end{aligned}$$

ゆえに，A が勝つ確率は $(*)$ に注意すると

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{M}\frac{6k(2k-1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}=\frac{6}{(m+3)(m+2)(m+1)}\sum_{k=1}^{M}(2k^2-k)\\&=\frac{6}{(m+3)(m+2)(m+1)}\cdot\left\{2\cdot\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}-\frac{M(M+1)}{2}\right\}\\&=\frac{6}{(m+3)(m+2)(m+1)}\cdot\frac{M(M+1)}{6}\{2(2M+1)-3\}\\&=\frac{M(M+1)(4M-1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\quad\cdots(☆)\\&=\frac{\dfrac{m+1}{2}\cdot\dfrac{m+3}{2}\cdot(2m+1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\quad\left(\because\ m=2M-1\text{ より } M=\frac{m+1}{2}\right)\\&=\frac{2m+1}{4(m+2)}\end{aligned}$$

[2] m が偶数のとき $m=2M$ ($M=1,2,3,\cdots$) とおく。

$2k$ 回終了後(このとき手番は A)に袋の中の赤球が 1 個であり，
$2k+1$ 回目に A が赤球を取って勝ちが確定する確率について考える。

2 回終了後に赤球が 1 個となり，その直後 A が赤球を取って勝ちが確定するのが最短。

球は全部で $m+3=2M+3$ 個あるため，$2M+3$ 回以内の操作で必ず決着はつく。

したがって，$2M+2$ 回終了後に赤球が 1 個であり，$2M+3$ 回目に A が赤球を取って勝ちが確定するのが最長。

ゆえに，k の範囲は $k=1,2,\cdots\cdots,M+1$ $\cdots(**)$

さて，$2k$ 回終了後に袋の中の赤球が 1 個となっている確率は c_{2k}

$$\text{このとき袋の中は}\begin{cases}\text{赤 } 1 \text{ 個}\\ \text{白 } m+2-2k \text{ 個}\\ \text{合計 } m+3-2k \text{ 個}\end{cases}$$

この状態から A が赤を取れば A の勝ちとなり，その確率は

$$c_{2k}\times\frac{1}{m-2k+3}=\frac{3\cdot 2k(2k-1)(m-2k+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\times\frac{1}{m-2k+3}$$

$$=\frac{6k(2k-1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}$$

ゆえに，A が勝つ確率は $(**)$ に注意すると

[1] の (☆) という結果を拝借し M を $M+1$ とすればよい

$$\sum_{k=1}^{M+1}\frac{6k(2k-1)}{(m+3)(m+2)(m+1)}=\frac{(M+1)(M+2)(4M+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}$$

$$=\frac{\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+4}{2}\cdot(2m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\quad\left(\because m=2M \text{ より } M=\frac{m}{2}\right)$$

$$=\frac{(m+4)(2m+3)}{4(m+3)(m+1)}$$

以上 [1], [2] から，A が勝つ確率は

$$\begin{cases} m \text{ が奇数のとき } \dfrac{2m+1}{4(m+2)} \\ m \text{ が偶数のとき } \dfrac{(m+4)(2m+3)}{4(m+3)(m+1)}\end{cases}\cdots\text{答}$$

【総括】

シンプルな題意とは裏腹に考えづらい問題でしょう。

m の偶奇による場合分けが必要であることは遅かれ早かれ気がつきたいところです。

【解 1】のようにスムーズに考えられれば問題ないですが，袋の中の赤球について 3 個 → 2 個 → 1 個 と追っていく【解 2】の路線だと結構大変な思いをすることになります。

【解 2】においては，袋の中の白球に文字が入っており，取り出す回数にも文字が入っているため手際が悪いと混乱しかねません。

赤球の個数は容易に把握できますし，

全体の個数が $(m+3)-$(取り出した回数)

とすぐに把握できますから，

白球の個数は引き算で求める

という作戦だとミスが減りそうです。

なお，出てきた結論で，$m\to\infty$ としてみると，$\frac{1}{2}$ に収束していることから，ある程度感覚ともマッチするでしょう。

また，m は正の整数としましたが，$m=0$ のときだと A が必ず勝つことになります。

本問の結果に $m=0$ を代入してみると

$$\frac{(0+4)(2\cdot 0+3)}{4(0+3)(0+1)}=\frac{4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 1}=1$$

となり，$m=0$ のときも正しい結果を与えることになります。