　$n$ を正の整数とする。曲線 $C_n : y=xe^{nx}$ に対して，曲線 $C_n$ の変曲点における接線を $\ell_n$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\ell_n$ の傾きは $n$ によらない一定値であることを示せ。

(2)　$\ell_n$，$C_n$，$x$ 軸で囲まれる部分の面積を $S_1$ とする。
また，$\ell_n$，$C_n$，$y$ 軸で囲まれる部分の面積を $S_2$ とするとき，
$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値は $n$ によらない一定値であることを示し，その値を求めよ。

＜ 自作 ＞

**【戦略】**

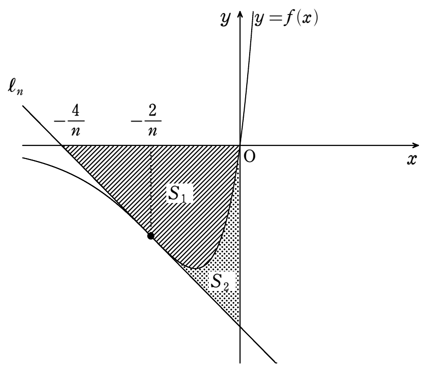
(1)　**素直に，$f''(x)=0$ となる $x$ を求めにいきます。**

$f'(x)=(nx+1)e^{nx}$，$f''(x)=(nx+2)ne^{nx}$ **となりますから $\ell_n$ の傾きは** $f'\left(-\dfrac{2}{n}\right)=-e^{-2}$ **ということになり，題意が示されます。**

(2)　**普通に $S_1$，$S_2$ をそれぞれ求めにいって $\dfrac{S_1}{S_2}$ を計算するという直接的な考えで問題ないでしょう。**

$f'(x)$，$f''(x)$ **が得られていることから増減表も得ることができます。**

**これにより，全体像，及び $\ell_n$ の位置関係を図示すると**




**ということになります。**

**$S_1$ は面積計算において，下側の曲線を与える式が $\ell_n$ から $C_n$ に変化するため，$S_2$ を求めて三角形から引いてやるのが得策です。**

【解答】

(1)　$f(x)=xe^{nx}$ とすると，$f'(x)=1\cdot e^{nx}+x\cdot(ne^{nx})=(nx+1)e^{nx}$

$$f''(x)=n\cdot e^{nx}+(nx+1)\cdot(ne^{nx})$$
$$=(nx+2)ne^{nx}$$

よって，変曲点は $\left(-\dfrac{2}{n},\ -\dfrac{2}{n}e^{-2}\right)$ であり，$\ell_n$ の傾きは

$$f'\left(-\frac{2}{n}\right)=\left\{n\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)+1\right\}e^{n\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)}$$
$$=-e^{-2}$$

であり，$n$ によらない一定値である。

(2)　$f(x)$ の増減表は

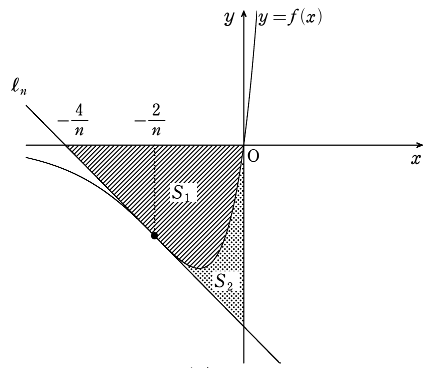
| $x$ | $(-\infty)$ | $\cdots$ | $-\dfrac{2}{n}$ | $\cdots$ | $-\dfrac{1}{n}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $(0)$ | ↘ | $-\dfrac{2}{n}e^{-2}$ | ↘ | $-\dfrac{1}{n}e^{-1}$ | ↗ | $(\infty)$ |

のようになる。

また，$\ell_n$ の式は

$$y=-\frac{1}{e^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)-\frac{2}{ne^2}$$
$$=-\frac{1}{e^2}x-\frac{4}{ne^2}$$

ゆえに，$y=f(x)$，$\ell_n$ のグラフ，及び $S_1$，$S_2$ は以下の (図 1) のようになる




(図 1)

$$S_2=\int_{-\frac{2}{n}}^{0}\left\{xe^{nx}-\left(-\frac{1}{e^2}x-\frac{4}{ne^2}\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{2}{n}}^{0}\left(xe^{nx}+\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{ne^2}\right)dx$$

ここで

$$\begin{aligned}\int xe^{nx}\,dx&=\int x\left(\frac{1}{n}e^{nx}\right)'dx\\&=\frac{1}{n}xe^{nx}-\int\frac{1}{n}e^{nx}\,dx\\&=\frac{1}{n}xe^{nx}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}e^{nx}+C\\&=\frac{1}{n}\left(x-\frac{1}{n}\right)e^{nx}+C\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

であることに注意すると，

$$S_2=\left[\frac{1}{n}\left(x-\frac{1}{n}\right)e^{nx}+\frac{1}{2e^2}x^2+\frac{4}{ne^2}x\right]_{-\frac{2}{n}}^{0}$$

$$\begin{aligned}&=\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-x\right)e^{nx}-\frac{1}{2e^2}x^2-\frac{4}{ne^2}x\right]_{0}^{-\frac{2}{n}}\\&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\right)e^{-2}-\frac{1}{2e^2}\cdot\frac{4}{n^2}-\frac{4}{ne^2}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-0\right)e^0\\&=\frac{3}{n^2e^2}-\frac{2}{n^2e^2}+\frac{8}{n^2e^2}-\frac{1}{n^2}\\&=\frac{9-e^2}{n^2e^2}\end{aligned}$$

ここで，$\ell_n$ の $x$ 切片，$y$ 切片をそれぞれ A，B とすると

$$\mathrm{A}\left(-\frac{4}{n},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ -\frac{4}{ne^2}\right)$$

よって，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|-\dfrac{4}{n}\right|\cdot\left|-\dfrac{4}{ne^2}\right|=\dfrac{8}{n^2e^2}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}S_1&=\triangle\mathrm{OAB}-S_2\\&=\frac{8}{n^2e^2}-\frac{9-e^2}{n^2e^2}\\&=\frac{e^2-1}{n^2e^2}\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\dfrac{e^2-1}{n^2e^2}}{\dfrac{9-e^2}{n^2e^2}}=\frac{e^2-1}{9-e^2}\quad\cdots\text{答}$$

となり，$n$ によらない一定値であることが示された。

【総括】

$C_n$：$y=xe^{nx}$ のグラフの概形は有名な形ですので，本問に限らず何かしら題材とされますし，$\int xe^{nx}\,dx$ も基本的な積分計算ですから，面積なども絡めた標準的なことが訊かれることになりやすいでしょう。

本問は $y=xe^{nx}$ のグラフに関する面白い性質をピックアップして問いにしてみたものです。