

解けない漸化式と不等式証明

a を $a > 2$ を満たす実数とし、数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 全ての正の整数 n に対して $x_n > 2$ であることを示せ。
- (2) 全ての正の整数 n に対して $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ であることを示せ。
- (3) $2 < a \leq 3$ のとき、全ての正の整数 n に対して $x_n \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$ であることを示せ。
- (4) $a > 3$ のとき、 $n \geq \frac{\log_2 \frac{a}{3}}{\log_2 \frac{4}{3}}$ を満たす n に対して $x_{n+1} < 3$ であることを示せ。

< '84 高考 >