a を整数とする。３次方程式

$$2x^3-3ax^2+2(a+7)x+a^2-9a+8=0$$

の解が全て正の整数であるとき，その３つの整数解と a の値を求めよ。

＜ '70 防衛大 ＞

【戦略】

解が具体的に与えられているならともかく，自分で α，β，γ などと設定せざるを得ない状況であれば，代入よりも

解と係数の関係

に走るのが自然です。

これにより，
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3a}{2} & \cdots ① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a+7 & \cdots ② \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{a^2-9a+8}{2} & \cdots ③ \end{cases}$$

という関係式を得ることになります。

この関係を見て違和感に近い「ん？」という感覚をもてるかどうかがカギとなります。

まず，① を見て，「整数＝分数？」と思うことになります。

これにより，a が偶数でないとマズイことに気がつくでしょう。

次に ③ を見て「$\alpha\beta\gamma=-\boxed{}$ ？ $\alpha\beta\gamma$ ってプラスだよね？」と思えば

「$a^2-9a+8<0$ じゃないとマズくないか？」

ということで，$(a-1)(a-8)<0$ から $1<a<8$ と絞り込むことに成功しました。

さらに a は偶数であったことから，候補が $a=2$，4，6 とさらに絞られます。

あとは個別検証です。

【解答】

$$2x^3-3ax^2+2(a+7)x+a^2-9a+8=0 \cdots (*)$$

の３つの正の整数解を α，β，γ とする。

解と係数の関係から，
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3a}{2} & \cdots ① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a+7 & \cdots ② \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{a^2-9a+8}{2} & \cdots ③ \end{cases}$$

① より，$2(\alpha+\beta+\gamma)=3a$ で，$3a$ が偶数となるので，a が偶数となる。

また，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ という条件から $\alpha\beta\gamma>0$ なので，③ から，

$$a^2-9a+8<0$$

すなわち $(a-1)(a-8)<0$ で，これより，$1<a<8$

これを満たす偶数 a は，$a=2$，4，6

[1]　$a=2$ のとき

①，③ から，$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=3 \\ \alpha\beta\gamma=3 \end{cases}$

特に $\alpha\beta\gamma=3$ から，$(\alpha, \beta, \gamma)=(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)$ だが，これらはいずれも $\alpha+\beta+\gamma=3$ を満たさない。

[2]　$a=4$ のとき

①，③ から，$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=6 \\ \alpha\beta\gamma=6 \end{cases}$

$\alpha\beta\gamma=6$ を満たす α，β，γ は $(1, 1, 6)$，$(1, 2, 3)$ の並べ替えに対応し，そのうち和が 6 なのは $(1, 2, 3)$ という数字の組である。

そして，$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1=11$ より，② も満たす。

実際 $(*)$ に $a=4$ を代入すると，$2x^3-12x^2+22x-12=0$
すなわち $x^3-6x^2+11x-6=0$

これは $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ と変形でき，確かに $x=1$，2，3 という３つの正の整数解をもつ。

[3]　$a=6$ のとき

①，③ から，$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=9 \\ \alpha\beta\gamma=5 \end{cases}$

特に $\alpha\beta\gamma=5$ から，$(\alpha, \beta, \gamma)=(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1)$ だが，これらはいずれも $\alpha+\beta+\gamma=9$ を満たさない。

以上 [1]，[2]，[3] から，

$\begin{cases} (*) \text{ の３つの正の整数解は } x=1, 2, 3 \\ a \text{ の値は } a=4 \end{cases}$ …㊀

【総括】

古い問題ですが，３次方程式が整数解をもつという設定の問題は近年でもよく出題される設定であり，最近の入試対策においても演習価値が十分にある話題です。

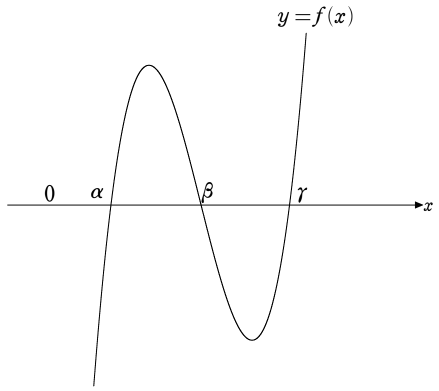
方程式と解についての問題では $\begin{cases} \text{代入} \\ \text{解と係数の関係} \end{cases}$ という 2 大路線があります。

今回の問題において代入路線はやるまでもなくスジが悪いことは言うまでもないと思います。(代入路線で劇的に解決したという人はぜひご一報ください。)

戦略で述べたような立式後の「違和感」を感じ取り，そこから攻め落とそうとする姿勢は磨いておくべき姿勢でしょう。

また，$f(x)=2x^3-3ax^2+2(a+7)x+a^2-9a+8$
における定数項 $f(0)$ が $(a-1)(a-8)$ と因数分解できるという作為に目が行くという人もいると思います。

そこから $f(0)$ のもつ図形的な意味 (グラフの y 切片) に目を付けると



というグラフ的なイメージが考えられ，

$f(0)<0$ じゃね？

と気がつくと思います。

そこから，$(a-1)(a-8)<0$，すなわち $1<a<8$ を得ることもできるでしょう。

まぁ，絞られた時点で半分は勝ちが確定しているようなものですから精神的にはだいぶ大きい結果ですね。