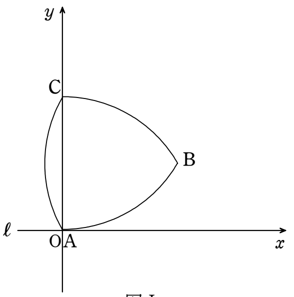


図 I

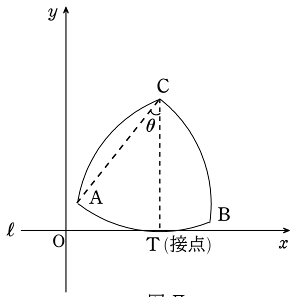


図 II

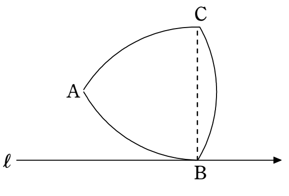


図 III

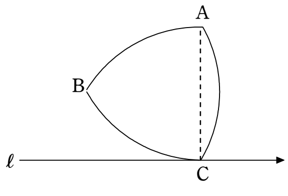


図 IV

上の図 I ～Ⅳ の図形 ABC は次の条件 (イ), (ロ) を満たしている。

（イ） 3 点 A，B，C は，1 辺の長さ a の正三角形の頂点である。

（ロ） 曲線 BC，CA，AB はそれぞれ A，B，C を中心とする半径 a の円弧である。

この図形を，図 I の状態から定直線 ℓ 上を滑ることなく右に転がしていき，図 Ⅳ の状態になったとする。

(1) 図 I の状態から図 Ⅲの状態に至るまでに，点 C の描く曲線の長さを求めよ。

(2) 図 I のように座標軸を決めるとき，図 Ⅱ における点 A の座標を a と θ を用いて表せ。ただし，図 Ⅱ において，点 T は x 軸と弧 AB との接点で，$\angle \mathrm{ACT}=\theta$ とする。

(3) 図 I の状態から図 Ⅳ の状態に至るまでに，点 A の描く曲線の長さを求めよ。

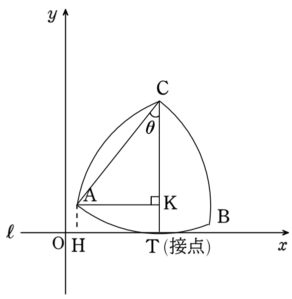
【戦略】

(1) **図Ⅰから図Ⅲに至るまでの途中経過が図Ⅱです。**

図Ⅱの一般論において，CT$=a$ で一定値であるため，図Ⅰから図Ⅲに至るまでに点 C は $y=a$ という定直線上を動くことになります。

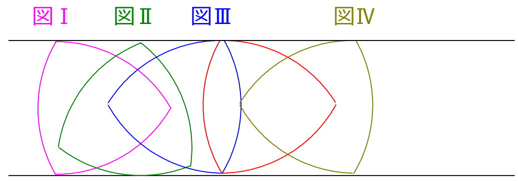
あとは図Ⅲにおける C の x 座標，すなわち B の座標が分かれば解決します。

(2) **A(X, Y) としたときに，X, Y を a, θ を用いて表すことを目指すわけです。**



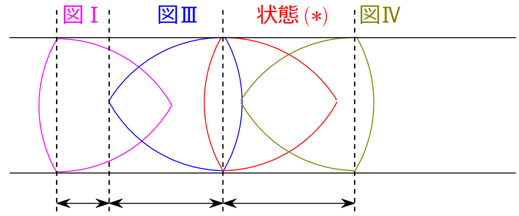
と，補助線 AH，AK を引くことで解決します。

(3) **少々図が五月蠅くなりますが，一つの図でまとめると**



というようになります。

図Ⅱは途中経過図なので，節目の図だけ書くと



となり，この 3 区間で考えることになります。

図Ⅰから 図Ⅲ に致るまでの点 A の動きは「サイクロイド」

図Ⅲ から 状態 (*) に至るまでの点 A の動きは「円弧 (回転運動)」

状態 (*) から 図Ⅳ に至るまでの点 A の動きは「直線運動」

という動きを捉えることができれば，実質の積分計算の負担はサイクロイド部分のみで済むでしょう。

【解答】

(1)　図Ⅰから図Ⅲに至るまでの途中経過が図Ⅱである。

図Ⅱより，$CT=a$ であるから，C は $y=a$ 上を動く。

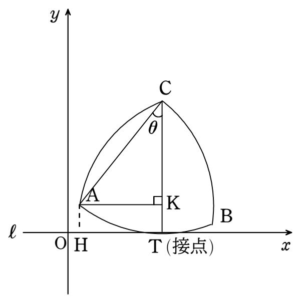
$\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，弧 AB の長さは $a\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}a$

図Ⅲにおける B の x 座標は弧 AB の長さに等しく $\dfrac{\pi}{3}a$

ゆえに，図Ⅲにおける C の座標は $\left(\dfrac{\pi}{3}a,\ a\right)$

以上から，図Ⅰから図Ⅲに至るまでに点 C の軌跡が表す曲線 (直線) の長さは $\dfrac{\pi}{3}a$ …答

(2)



$A(X,Y)$ とし，A から x 軸に下ろした垂線の足を H
A から線分 CT に下ろした垂線の足を K とする。

$$\begin{aligned}OT&=\text{弧 AT の長さ}\\&=a\theta\end{aligned}\qquad\begin{aligned}X&=OT-HT\\&=OT-AK\\&=a\theta-a\sin\theta\\&=a(\theta-\sin\theta)\end{aligned}\qquad\begin{aligned}Y&=KT\\&=CT-CK\\&=a-a\cos\theta\\&=a(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

ゆえに，$A(a(\theta-\sin\theta),\ a(1-\cos\theta))$ …答

(3)　[1]　図Ⅰから図Ⅲまでに点 A が描く曲線の長さについて

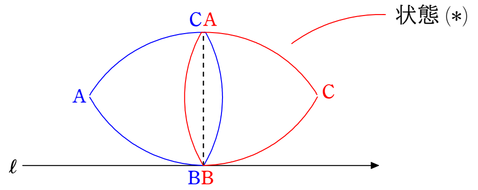
θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ である。

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),\quad \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}&=\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\\&=a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\\&=a\sqrt{2\cdot2\sin^2\frac{\theta}{2}}\\&=2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\\&=2a\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

[1] の長さを L_1 とすると，
$$\begin{aligned}L_1&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\\&=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=2(2-\sqrt{3})a\end{aligned}$$

[2]　図Ⅲの状態から頂点 A が $y=a$ 上に達するまでに描く部分の長さについて



この間，点 A は点 B を中心とした回転角 $\dfrac{\pi}{3}$ の円回転運動となる。

よって [2] の長さを L_2 とすると，$L_2=\dfrac{\pi}{3}\times a=\dfrac{\pi}{3}a$

[3]　[2] の状態 (*) から，図Ⅳになるまでに描く部分の長さ

(1) 同様に考えると，点 A は直線 $y=a$ 上を動き，その長さ L_3 は
$$L_3=\frac{\pi}{3}a$$

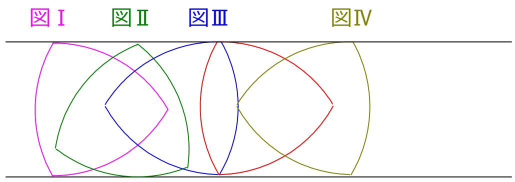
求める長さは $L_1+L_2+L_3$ より

$$\begin{aligned}L_1+L_2+L_3&=\left\{2(2-\sqrt{3})+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right\}a\\&=\left(4-2\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)a\end{aligned}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

ルーローの三角形と呼ばれる有名図形に関する問題です。

この図形の特徴は，どの方向からの幅も一定である「定幅曲線」という点です。



なお，皆さんご存じ「円」という曲線も定幅曲線の一つです。

今回の図Ⅰから図Ⅳまでの点 A の軌跡が表す図形は

サイクロイド → 円 → 直線

と変化しています。

ルーローの三角形が転がっていく様子をイメージした経験があるとスムーズです。

経験がなかったとしてもそこまで複雑な動きではないため，頭で動きを追っていくことは不可能ではないですが，エネルギーは必要でしょう。