$n=1, 2, \cdots$ に対して数列 $\{F_n\}$, $\{L_n\}$ を

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$
$$L_1=1,\ L_2=3,\ L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$$

で定まる数列とする。

このとき

$$5{F_n}^2+4(-1)^n={L_n}^2$$

が成り立つことを示せ。

＜ シューブの公式 ＞

【戦略 1】

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$，リュカ数列 $\{L_n\}$ の一般項は

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),\ L_n=\alpha^n+\beta^n$$

$$\left(\text{ただし},\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

で与えられます。

これを用いて ${L_n}^2-5{F_n}^2$ を計算していくと，手なりに 結論が得られます。

【解 1】

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ は

$$\begin{cases} F_{n+2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(F_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F_n\right) \cdots ① \\ F_{n+2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(F_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_n\right) \cdots ② \end{cases}$$

と 2 通りに変形できる。

① より，
$$\begin{aligned} F_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n &=\left(F_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots ③ \end{aligned}$$

② より，
$$\begin{aligned} F_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n &=\left(F_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}F_1\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots ④ \end{aligned}$$

③ − ④ より $\sqrt{5}F_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

よって，$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

一方，同様にして $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$ は

$$\begin{cases} L_{n+2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}L_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(L_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}L_n\right) \cdots ⑤ \\ L_{n+2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}L_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(L_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}L_n\right) \cdots ⑥ \end{cases}$$

と 2 通りに変形できる。

⑤ より，
$$\begin{aligned} L_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}L_n &=\left(L_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}L_1\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(3-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdots ⑦ \end{aligned}$$

⑥ より，
$$\begin{aligned} L_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}L_n &=\left(L_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}L_1\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots ⑧ \end{aligned}$$

⑦ − ⑧ より，$\sqrt{5}L_n=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$\begin{aligned} L_n &=\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

つまり，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ として

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),\ L_n=\alpha^n+\beta^n$$

であるから，

$$\begin{aligned} {L_n}^2-5{F_n}^2 &=(\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2\alpha^n\beta^n)-(\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}) \\ &=4(\alpha\beta)^n \end{aligned}$$

$\alpha\beta=\dfrac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$ であるため

$${L_n}^2-5{F_n}^2=4(-1)^n$$

よって，$5{F_n}^2+4(-1)^n={L_n}^2$ が成り立つ。

【戦略 2】

第 3 講で学んだ相互関係

$$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$$

第 5 講 で学んだ「カッシーニ・シムソンの定理」

$$F_nF_{n+2}-{F_{n+1}}^2=(-1)^{n+1}$$

を駆使しても示すことができます。

【解 2】

$F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ $(n=2,3,4,\cdots)$ $\cdots(*)$ であることを n についての数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=2$ のとき，$\begin{cases} F_1+F_3=1+2=3 \\ L_2=3 \end{cases}$

よって，$F_1+F_3=L_2$ であり，$(*)$ は正しい。

[2]　$n=3$ のとき，$\begin{cases} F_2+F_4=1+3=4 \\ L_3=4 \end{cases}$

よって，$F_2+F_4=L_3$ であり，$(*)$ は正しい。

[3]　$n=k$ $(k=3,4,\cdots)$のとき，$\begin{cases} F_{k-1}+F_{k+1}=L_k \\ F_{k-2}+F_k=L_{k-1} \end{cases}$ と仮定する。

$$\begin{aligned} F_k+F_{k+2}&=F_k+F_{k+1}+F_k \\ &=F_{k-2}+F_{k-1}+F_{k+1}+F_k \\ &=L_{k-1}+L_k \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &=L_{k+1} \end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

[1]，[2]，[3] から，$F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ $(n=2,3,4,\cdots)$ が成立する。

次に，

$$F_{n+2}F_n-{F_{n+1}}^2=(-1)^{n+1} \quad \cdots(*)'$$

であることを n についての数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき　　$F_1=F_2=1$ であるから，$F_3=2$

$F_3F_1-{F_2}^2=2\cdot1-1^2=(-1)^2$ であり，$(*)'$ は成立する。

[2]　$n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

${F_k}F_{k+2}-{F_{k+1}}^2=(-1)^{k+1}$ が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned} F_{k+3}F_{k+1}-{F_{k+2}}^2&=(F_{k+2}+F_{k+1})F_{k+1}-{F_{k+2}}^2 \\ &=F_{k+2}F_{k+1}+{F_{k+1}}^2-{F_{k+2}}^2 \\ &=F_{k+2}(F_{k+2}-F_k)+{F_{k+1}}^2-{F_{k+2}}^2 \\ &=-F_{k+2}F_k+{F_{k+1}}^2 \\ &=-(F_{k+2}F_k-{F_{k+1}}^2) \\ &=-(-1)^{k+1} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &=(-1)^{k+2} \end{aligned}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも $(*)'$ は成立する。

[1]，[2] より，$F_{n+2}F_n-{F_{n+1}}^2=(-1)^{n+1}$ が示された。

$(*)$，$(*)'$ より，

$$\begin{cases} L_n=F_{n-1}+F_{n+1} \\ F_{n-1}F_{n+1}-{F_n}^2=(-1)^n \end{cases} \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

であるから，

$$\begin{aligned} {L_n}^2-4(-1)^n&=(F_{n-1}+F_{n+1})^2-4(F_{n-1}F_{n+1}-{F_n}^2) \\ &={F_{n-1}}^2+{F_{n+1}}^2-2F_{n-1}F_{n+1}+4{F_n}^2 \\ &=(F_{n-1}-F_{n+1})^2+4{F_n}^2 \\ &=(-F_n)^2+4{F_n}^2 \quad (\because F_{n-1}+F_n=F_{n+1}) \\ &=5{F_n}^2 \end{aligned}$$

また，$n=1$ のときは，

$$\begin{aligned} {L_1}^2-4(-1)^1&=1+4 \\ &=5 \\ &=5{F_1}^2 \end{aligned}$$

以上から，$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$5{F_n}^2+4(-1)^n={L_n}^2$$

が成立する。

【総括】

解 1 はビネの公式を用いた直接的解法で，

$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$，$L_n=\alpha^n+\beta^n$（ただし，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$）

という一般項の形さえ認めてしまえば

$$\begin{aligned} {L_n}^2-5{F_n}^2&=(\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2\alpha^n\beta^n)-(\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}) \\ &=4(\alpha\beta)^n \\ &=4\cdot(-1)^n \end{aligned}$$

という数行で終わる単純明快な証明です。

解 2 はこれまで学んだ内容の復習的な解法です。

第 3 講でフィボナッチ数列とリュカ数列の相互関係を扱いましたが，今回示した相互関係

$$5{F_n}^2+4(-1)^n={L_n}^2$$

は「シューブの公式」と呼ばれるものです。