$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義された数列 $\{F_n\}$ を考える。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) n が m で割り切れるならば，F_n が F_m で割り切れることを示せ。

(2) F_n が F_m で割り切れるならば，n が m で割り切れることを示せ。

＜有名事実＞

【戦略】

(1) **n が m で割り切れるとき，$n=mq$ と表せますから**
フィボナッチ数列の加法定理

$$F_{n+m}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n$$

を利用すると

$$F_{mq+m}=F_m F_{mq+1}+F_{m-1} F_{mq}$$

となります。

$$F_{m(q+1)}=F_m F_{mq+1}+F_{m-1} F_{mq}$$

と見ると，
F_{mq} が F_m で割り切れるならば，$F_{m(q+1)}$ も F_m で割り切れる
ことが容易に読み取れるはずで，q についての帰納法で上手くいく
算段がつくでしょう。

(2) **こちらも数学的帰納法で証明します。**

通常 $n=mk+r$ 等と表現し，

$$F_{mk+r}\text{ が }F_m\text{ で割り切れる }\Longrightarrow\ r=0$$

ということを k についての帰納法で示そうとするのが人情でしょう。

ただ，$k=1$ のとき F_{m+r} が F_m で割り切れる $\Longrightarrow$ $r=0$ を示すのが
面倒です。

そこで，$n=mk-r$ と表現することで，

$$F_{mk-r}\text{ が }F_m\text{ で割り切れる }\Longrightarrow\ r=0$$

ということを k についての帰納法で示すことにします。

すると，$k=1$ のとき F_{m-r} が F_m で割り切れる $\Longrightarrow$ $r=0$
というのは，$r\neq 0$ と仮定すると $F_{m-r}<F_m$ となりおかしくなるため
ただちに $r=0$ が導けます。

【解答】

(1) n が m で割り切れるとき，$n=mq$ となる正の整数 q が存在する。

$q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，F_{mq} が F_m で割り切れることを示せば
よく，これを q に関する数学的帰納法で示す。

[1] $q=1$ のとき，$F_{m\cdot 1}$ は F_m で割り切れる (自明)

[2] $q=k$ のとき，F_{mk} が F_m で割り切れると仮定する。

$$F_{m(k+1)}=F_m F_{mk+1}+F_{m-1} F_{mk}$$

帰納法の仮定から，ただちに $F_{m(k+1)}$ は F_m の倍数，すなわち
$F_{m(k+1)}$ は F_m で割り切れ，$q=k+1$ のときも主張は正しい。

[1]，[2] より，F_{mq} $(q=1,\ 2,\ \cdots)$ は F_m で割り切れる。

すなわち，F_n は F_m で割り切れる。

(2) n は，

$$n=mk-r\ \left(\begin{cases}k=1,\ 2,\ \cdots\cdots\\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\end{cases}\right)$$

と表せる。

F_{mk-r} が F_m で割り切れる $\Longrightarrow$ $r=0$ であることを示せばよく，
これを k についての数学的帰納法で示す。

[1] $k=1$ のとき

F_{m-r} が F_m で割り切れるとき，$r\fallingdotseq 0$ と仮定すると，
$F_{m-r}<F_m$ なので，F_{m-r} は F_m で割り切れないため不合理。

よって，$r=0$

[2] $k=\ell$ のとき

$F_{m\ell-r}$ が F_m で割り切れる $\Longrightarrow$ $r=0$ …(☆) と仮定する。

このとき，$F_{m(\ell+1)-r}$ が F_m で割り切れる $\Longrightarrow$ $r=0$ を示す。

$$\begin{aligned}F_{m(\ell+1)-r}&=F_{m\ell+m-r}\\&=F_{m-1}F_{m\ell-r}+F_m F_{m\ell-r+1}\end{aligned}$$

ここで，$F_{m\ell-r}$ を F_m で割った商を Q，余りを R とすると

$$F_{m\ell-r}=QF_m+R\ \ (R=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ F_m-1)$$

と表せるため

$$\begin{aligned}F_{m(\ell+1)-r}&=F_{m-1}(QF_m+R)+F_m F_{m\ell-r+1}\\&=F_m(QF_{m-1}+F_{m\ell-r+1})+RF_{m-1}\end{aligned}$$

$F_{m(\ell+1)-r}$ が F_m で割り切れるとき，RF_{m-1} が F_m で割り切れる。

つまり，$\dfrac{RF_{m-1}}{F_m}=\alpha$ となる整数 α が存在する。

これより，$\dfrac{\alpha}{R}=\dfrac{F_{m-1}}{F_m}$ である。

F_{m-1}，F_m は互いに素なので $\dfrac{F_{m-1}}{F_m}$ は既約分数である。

$\dfrac{\alpha}{R}$ が約分され，既約分数 $\dfrac{F_{m-1}}{F_m}$ になることから

分母の R は F_m で割り切れる（ $\dfrac{R}{F_m}=B$ となる整数 B が存在する）

今，$R=0$，1，2，……，F_m-1 であったため，

$$R=0$$

となるしかない。

つまり，$F_{m\ell-r}$ が F_m で割り切れることになり，(☆) より $r=0$

これより，$F_{m(\ell+1)-r}$ が F_m で割り切れる $\Longrightarrow r=0$

ということが言え，$k=\ell+1$ のときも主張が正しいことが言えた。

[1], [2] より，

F_n が F_m で割り切れるならば，n が m で割り切れる

ことが示された。

【総括】

問題の方の総括で

フィボナッチ数列の整除性

n が m の倍数であるとき

F_n（ $=F_{mq}$ ）は F_m の倍数である

ということを述べましたが，実際には見ての通り

n が m の倍数 $\Longleftrightarrow$ F_n が F_m の倍数

という同値性が成り立ちます。