3次関数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

において，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ はすべて整数であるとする。

(1) $f(x)$ を次のように書き直すとき，p，q，r，s を a，b，c，d を用いて表せ。

$$f(x)=p\,\frac{x(x-1)(x+1)}{6}+q\,\frac{x(x-1)}{2}+rx+s$$

(2) 任意の整数 n に対して $f(n)$ は整数であることを示せ。

＜ '95 甲南大 改 ＞

【戦略】

(1) **$f(x)$ を $f(x)=p\,\dfrac{x(x-1)(x+1)}{6}+q\,\dfrac{x(x-1)}{2}+rx+s$ の形で書き直すからには**

$$f(-1)，f(0)，f(1)$$

については当然調べたくなるでしょう。

まずは p，q，r を含む項に消えていただくべく，$x=0$ を代入してみます。

すると，$f(0)=s=d$ ということで，ひとまず s は解決です。

次に，$x=1$ を代入して，p，q に消えていただくと

$$f(1)=r+s=a+b+c+d$$

が得られ，$s=d$ ですから，$r=a+b+c$ が得られ，r も解決です。

さらに，p に消えていただくよう，$x=-1$ を代入してみると

$$f(-1)=q-r+s=-a+b-c+d$$

が得られます。

s，r が解決しているため，q も a，b，c，d を用いて表すことができ解決します。

最後に $x=2$ を代入することで

$$f(2)=p+q+2r+s=8a+4b+2c+d$$

が得られます。

q，r，s が解決しているため，p も a，b，c，d を用いて表すことができ，解決です。

(2) **$f(0)=s$ で，$f(0)$ が整数という条件から s は整数となります。**

$f(1)=r+s$ だったわけですが，$f(1)$，s が整数なので，r も整数となります。

このように，順次確認していくと，p，q，r，s は全て整数ということになります。

$$f(n)=p\cdot\frac{n(n-1)(n+1)}{6}+q\cdot\frac{n(n-1)}{2}+rn+s$$

において，あとは分数部分の $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ ですがこれも連続3整数の積が $3!(=6)$ の倍数であること，連続2整数の積が $2!(=2)$ の倍数であることを考えると，任意の整数 n に対して $f(n)$ が整数であることが分かります。

【解答】

(1) $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d \\ p\,\dfrac{x(x-1)(x+1)}{6}+q\,\dfrac{x(x-1)}{2}+rx+s \end{cases}$

と2通りで表したとき，$f(0)=s=d$

$f(1)=r+s=a+b+c+d \Longleftrightarrow r=a+b+c$ （$\because\ s=d$）

$f(-1)=q-r+s=-a+b-c+d \Longleftrightarrow q=-a+b-c+d+r-s$

よって，

$$\begin{aligned} q&=-a+b-c+d+(a+b+c)-d \\ &=2b \end{aligned}$$

$f(2)=p+q+2r+s=8a+4b+2c+d$

$$\Longleftrightarrow p=-q-2r-s+8a+4b+2c+d$$

よって，

$$\begin{aligned} p&=-2b-2(a+b+c)-d+8a+4b+2c+d \\ &=6a \end{aligned}$$

以上より，p，q，r，s を a，b，c，d で表すと

$(p，q，r，s)=(6a，2b，a+b+c，d)$ …【答】

(2) $f(0)=s$ で，$f(0)$ が整数であるという条件から，s は整数。

$f(1)=r+s$，すなわち，$r=f(1)-s$ で，$f(1)$，s が整数であることから r は整数。

$f(-1)=q-r+s$，すなわち $q=f(-1)+r-s$ で，$f(-1)$，r，s が整数であることから q は整数。

$f(2)=p+q+2r+s$，すなわち $p=f(2)-q-2r-s$ で，$f(2)$，q，r，s が整数であることから p は整数。

つまり，p，q，r，s は整数である。

ここで，$n(n-1)(n+1)$ は連続3整数の積であるため，$3!(=6)$ の倍数。

$n(n-1)$ は連続2整数の積であるため，$2!(=2)$ の倍数。

ゆえに，$\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ は整数。

したがって，任意の整数 n に対して

$$f(n)=p\cdot\frac{n(n-1)(n+1)}{6}+q\cdot\frac{n(n-1)}{2}+rn+s$$

は整数となる。

【総括】

補間多項式という話題で裏がありますが，本問は(1)という強力なヒントがあるため，
その背景を知らなくてもそれが劇的に出来不出来に直結するということはありません。

入試問題として押さえておきたいポイントは，

連続 k 整数の積が $k!$ の倍数となる

ということです。

証明は至極単純で，

$$n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(k-1)\} \quad (n \geqq k)$$

という連続 k 整数の積は

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(k-1)\} &= {}_n\mathrm{P}_k \\ &= {}_n\mathrm{C}_k \times k! \end{aligned}$$

となるため，$k!$ の倍数となります。

◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇ 参考 ◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，

$$f(0)=s,\ f(1)=r,\ f(-1)=q,\ f(2)=p$$

としたとき

$f(x)$ を p，q，r，s (代入値) を用いた形で表したい

と思います。

これを普通にやると，$\begin{cases} f(0)=d=s \\ f(1)=a+b+c+d=r \\ f(-1)=-a+b-c+d=q \\ f(2)=8a+4b+2c+d=p \end{cases}$ と見て，a，b，c，d

についての連立方程式と見て，a，b，c，d について解いてやるというのが一般的でしょう。

これに対して，ある工夫をして労力を減らすことを考えます。

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x+1)$$

と設定してみると，

$$\begin{aligned} &f(0)=a_0=s \\ &f(1)=a_0+a_1=r \\ &f(-1)=a_0-a_1+2a_2=q \\ &f(2)=a_0+2a_1+2a_2+6a_3=p \end{aligned}$$

ですから，

$$\begin{aligned} &a_0=s \\ &\to a_1=r-a_0=r-s \\ &\to a_2=\frac{-a_0+a_1+q}{2}=\frac{-s+(r-s)+q}{2}=\frac{q+r-2s}{2} \\ &\to a_3=\frac{-a_0-2a_1-2a_2+p}{6}=\frac{-s-2(r-s)-(q+r-2s)+p}{6}=\frac{p-q-3r+3s}{6} \end{aligned}$$

と，順次 a_0，a_1，a_2，a_3 が p，q，r，s という代入値で表せるということになります。

代入値を用いて表現しなおしたものを補間多項式と呼び，今回のように順次求まっていくよう工夫した方法は

「ニュートンの補間法」

と呼ばれます。

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)$$

と設定した際，ニュートンの補間法から

$$\begin{aligned} f(x)&=s+(r-s)x+\frac{q+r-2s}{2}x(x-1)+\frac{p-q-3r+3s}{6}x(x-1)(x+1) \\ &=s+(r-s)x+(q+r-2s)\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(p-q-3r+3s)\cdot\frac{x(x-1)(x+1)}{6} \end{aligned}$$

なので，p，q，r，s (代入値) が整数だと，$\dfrac{n(n-1)}{2}$，$\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$

が整数だから，任意の整数 n に対して $f(n)$ が整数になるよというカラクリなわけです。