0または正の整数をとる変数 X, Y がある。 X が整数 n $(n \geqq 0)$ をとる確率と，Y が整数 n $(n \geqq 0)$ をとる確率は，ともに p_n であるとする。

（ここで，$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ である。）

いま，任意の整数 m，n $(m \geqq 0$，$n \geqq 0)$ に対して，$X=m$ なる事象と $Y=n$ なる事象は独立であり，また，$X+Y=n$ となる確率は

$$(n+1)p_{n+1}$$

に等しいという。

このとき，$p_n\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ と $\sum_{n=0}^{\infty} np_n$ の値を求めよ。

＜ '85 東京大 ＞

【戦略】

$X+Y=n$ とは

$$(X,\ Y)=(0,\ n),\ (1,\ n-1),\ (2,\ n-2),\ \cdots\cdots,\ (n,\ 0)$$

のいずれかが起こる場合であり，その確率は本問のルールにより

$$p_0 \cdot p_n + p_1 \cdot p_{n-1} + p_2 \cdot p_{n-2} + \cdots\cdots + p_n \cdot p_0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot p_{n-k}$$

ということになり，これが $(n+1)p_{n+1}$ と等しいという条件から

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot p_{n-k} = (n+1)p_{n+1}$$

と，何やら漸化式のようなものが得られます。

こういうおどろおどろしいモノに対しては，試しに実験してみるのが切り崩す突破口になり得ますので，試しに $n=0$ を代入してみると

$$p_0 \cdot p_0 = p_1$$

となり，$p_1 = {p_0}^2$ を得ます。

続いて $n=1$ を代入してみると

$$p_0 p_1 + p_1 p_0 = 2p_2$$

ですから，$p_1 = {p_0}^2$ も併せて考えると $2{p_0}^3 = 2p_2$ で，$p_2 = {p_0}^3$ を得ます。

もうここまでくると，$p_n = {p_0}^{n+1}$ か？ という予想が立ちますので，あとはこれを数学的帰納法で示せばよいでしょう。

手元にある漸化式は「和」に関するもので

p_0 から p_1 が
p_0，p_1 の情報から p_2 が
p_0，p_1，p_2 の情報から p_3 が

という構造で得られていくので，帰納法の形についても

$n=0$ で正しいから $n=1$ で正しい
$n=0$，1 で正しいから $n=2$ で正しい
$n=0$，1，2 で正しいから $n=3$ で正しい

という構造の帰納法を選択します。

さらに，$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ という情報から $p_0 = \frac{1}{2}$ ということも分かりますから p_n については解決です。

$\sum_{n=0}^{\infty} np_n$ については，$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ と得られており，(等差)×(等比) 型の $\sum$ 計算ということになりますから，定石通り公比をかけてずらし，辺々を引く「カケズラ」という態度で倒します。

【解答】

$X+Y=n$ となる場合は

$$(X,\ Y)=(0,\ n),\ (1,\ n-1),\ (2,\ n-2),\ \cdots\cdots,\ (n,\ 0)$$

のいずれかが起こる場合であり，その確率は

$$p_0 \cdot p_n + p_1 \cdot p_{n-1} + p_2 \cdot p_{n-2} + \cdots\cdots + p_n \cdot p_0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot p_{n-k}$$

条件より，これが $(n+1)p_{n+1}$ と等しいので

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot p_{n-k} = (n+1)p_{n+1} \ \cdots (*)$$

$(*)$ に $n=0$ を代入すると ${p_0}^2 = p_1$ $\quad \therefore\ p_1 = {p_0}^2$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$p_0 p_1 + p_1 p_0 = 2p_2$$
$${p_0}^3 + {p_0}^3 = 2p_2$$
$$2{p_0}^3 = 2p_2$$
$$\therefore\ p_2 = {p_0}^3$$

$p_n = {p_0}^{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ $\cdots$(☆) と予想出来るため，これを n についての数学的帰納法で示す。

[1] $n=0$ のとき 上記実験より，(☆) は正しい。

[2] $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$p_n = {p_0}^{n+1}$$

と仮定する。

つまり，$p_0 = {p_0}^1$，$p_1 = {p_0}^2$，$p_2 = {p_0}^3$，$\cdots\cdots$，$p_m = {p_0}^{m+1}$
と仮定する。

このとき，$(*)$ より，$\sum_{k=0}^{m} p_k \cdot p_{m-k} = (m+1)p_{m+1}$ であるから

$$p_0 \cdot p_m + p_1 \cdot p_{m-1} + \cdots\cdots + p_m \cdot p_0 = (m+1)p_{m+1}$$

帰納法の仮定から

$$p_0 \cdot {p_0}^{m+1} + {p_0}^2 \cdot {p_0}^m + \cdots\cdots + {p_0}^{m+1} \cdot p_0 = (m+1)p_{m+1}$$
$$(m+1){p_0}^{m+2} = (m+1)p_{m+1}$$
$$\therefore\ p_{m+1} = {p_0}^{m+2}$$

ゆえに，$n=m+1$ のときも (☆) は正しい。

以上，[1]，[2] から $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して $p_n = {p_0}^{n+1}$ $\cdots$①

また，$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} {p_0}^{k+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{ p_0 \cdot \frac{1-{p_0}^{n+1}}{1-p_0} \right\}\\ &= \frac{p_0}{1-p_0} \quad (\because\ 0<p_0<1)\end{aligned}$$

であることから，$\frac{p_0}{1-p_0}=1$ となり，$p_0=\frac{1}{2}$

したがって，① に代入すれば，$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ … 答

次に，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n p_n &= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

ここで，$T_n = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ とすると

$$\begin{aligned}T_n &= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\ \frac{1}{2}T_n &= \qquad\qquad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\end{aligned}$$

辺々引くと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}T_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\\ &= \frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\end{aligned}$$

ゆえに，$T_n = \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty} n p_n &= \lim_{n\to\infty} T_n\\ &= 1 \ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

(*) までは辿り着きたいところです。

この (*) は機械的な式変形で倒せる漸化式ではなく，

実験 → 予想 → 帰納法

という最も原始的な態度で倒す必要があり，式変形に固執してしまうと収拾がつかなくなり Give up ということになりかねません。

なお，$p_0=\frac{1}{2}$ を得るくだりの中でさらりと $0<p_n<1$ ということを用いましたが，それについて若干補足をします。

$p_0=0$ とすると $p_n={p_0}^{n+1}$ であったため，$p_1=p_2=\cdots\cdots=0$ ということになってしまい，$p_0+p_1+\cdots\cdots=1$ となりません。

また，$p_0=1$ とすると，$p_n={p_0}^{n+1}$ から $p_1=p_2=\cdots\cdots=1$ ということになってしまい，やはり $p_0+p_1+\cdots\cdots=1$ となりません。

したがって，一般的に $0\leqq p_0\leqq 1$ ですが，等号成立はあり得ないということになり，$0<p_0<1$ ということになります。

ちなみに，$\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = 1$ という最後の結果は，この試行における非負整数のとる値の期待値が 1 であるということに他なりません。

また，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n p_n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\, X+Y=n \text{ となる確率} \,\} \ (\leftarrow \text{ 本問の条件 })\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \{\, X+Y=n \text{ となる確率} \,\}\\ &\quad = (X+Y=0 \text{ となる確率}) + (X+Y=1 \text{ となる確率}) + \cdots\cdots\end{aligned}$$

なので，全事象の確率が 1 であることを考えると $\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = 1$ という結果は当然と言えるでしょうし，この導出過程で記述することも考えられますが試験場では難しいでしょう。