連続関数 $f(x)$，$g(x)$ に関する次の命題は正しいか，正しくないか。正しいときは○，正しくないときは×を記入せよ。また，正しいときは証明を与え，正しくないときはそれを示す反例をあげよ。

(1) $f'(x)=g'(x)$ が任意の x に対して成立するならば，任意の x に対して $f(x)=g(x)$ である。

(2) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ ならば $0\leqq x\leqq 1$ なる区間において $f(x)=g(x)$ である。

(3) $\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t g(x)\,dx$ が任意の t に対して成り立つならば，任意の x に対して $f(x)=g(x)$ である。

(4) $f'(x)=g'(x)$ が任意の x について成り立ち $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ ならば，任意の x に対して $f(x)=g(x)$ である。

(5) $\int_0^t f(x)\,dx\geqq\int_0^t g(x)\,dx$ が $t\geqq 0$ において常に成り立つならば，$x\geqq 0$ において常に $f(x)\geqq g(x)$ である。

(6) 任意の x に対して $f'(x)\geqq g'(x)$ ならば，任意の x に対して $f(x)\geqq g(x)$ である。

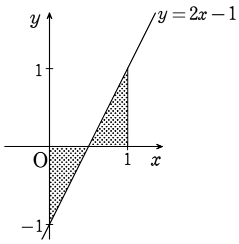
＜ '88 大阪教育大 ＞

【戦略】

(1) $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=0 \Leftrightarrow \{f(x)-g(x)\}'=0$ なので

$f(x)-g(x)=C$（C は定数）であり，$f(x)=g(x)+C$ というのが一般論であり，$f(x)=g(x)$ とは限りません。

(2) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx=0 \cdots$ ① です。



定積分が「符号付き面積」であることを考え，定積分の値が 0 となるシチュエーションを考えると，上の図のように正と負の打ち消しあうような場合を考えることになります。

もちろん，$f(x)-g(x)=0$ というのも ① を満たす例の 1 つですが例えば，$f(x)-g(x)=2x-1$ というのも ① を満たす 1 つの例でしょう。

(3) $\int_0^t\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$ が任意の t で成立するときを考えるわけですが面積的に考えて常に打ち消しあうということは $f(x)-g(x)$ が恒等的に 0 となるとき以外はあり得ません。

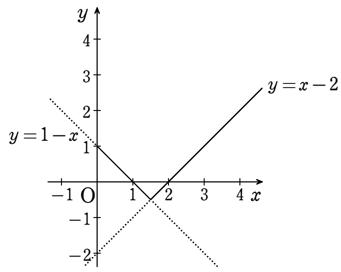
つまり，$f(x)=g(x)$ ということが成り立ち，主張は正しいことになります。

(4) $\{f(x)-g(x)\}'=0$ のときを考えるわけで，$f(x)-g(x)=C$（C は定数）となるときを考えることになります。

加えて $\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$，すなわち $\int_0^1 C\,dx=0$ であることも加味すると，$C=0$ ということになり，$f(x)=g(x)$ を得て，主張は正しいことになります。

(5) $\int_0^t\{f(x)-g(x)\}\,dx\geqq 0$ が $t\geqq 0$ なる任意の t で成立する $\cdots$ ② ときを考えることになります。

もちろん，$x\geqq 0$ で常に $f(x)-g(x)\geqq 0$ が成り立っていれば文句はないですが，負の面積部分が正の面積部分を打ち消すに及ばない場合，例えば



というような状況であれば，② を満たすことになり，これが反例ということになります。

(6) $\{f(x)-g(x)\}'\geqq 0$，すなわち $f(x)-g(x)$ が単調増加であるときを考えることになります。

例えば，$f(x)-g(x)=x+1$（単調増加関数）のときを考えてみます。

こうなるような $f(x)$，$g(x)$ として，$f(x)=2x+1$，$g(x)=x$ などがあります。

任意の x に対して，$f'(x)=2$，$g'(x)=1$ で，$f'(x)\geqq g'(x)$ ですが常に $f(x)\geqq g(x)$ とは限らず，これが反例ということになります。

【解答】

(1)　×　【反例】$f(x)=x^2$，$g(x)=x^2+1$

(2)　×　【反例】$f(x)=x$，$g(x)=1-x$

$\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$，$\int_0^1(1-x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

だが，$0\leqq x\leqq 1$ で常に $f(x)=g(x)$ というわけではない。

(3)　○　【証明】

$\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t g(x)\,dx$ が任意の t で成立するとき，

$\int_0^t\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$ が任意の t で成立する。

ゆえに，$f(x)-g(x)=0$ が恒等的に成立し，$f(x)=g(x)$ である。

(4)　○　【証明】

$f'(x)=g'(x)$，すなわち $\{f(x)-g(x)\}'=0$ が成り立つとき

$$f(x)-g(x)=C \quad (\ C \text{は定数}\ )$$

となるから，$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$，すなわち

$$\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$

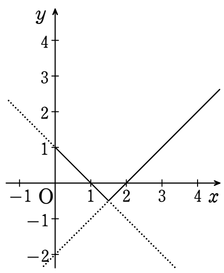
が成り立つという条件も考えると

$$\int_0^1 C\,dx=0$$

すなわち，$C=0$ を得る。

これより，$f(x)-g(x)=0$，すなわち $f(x)=g(x)$ が成り立つ。

(5)　×　【反例】$f(x)=\begin{cases}1-x & \left(0\leqq x\leqq \frac{3}{2}\right)\\ x-2 & \left(x>\frac{3}{2}\right)\end{cases}$，$g(x)=0$



(図 1)

このとき，$\int_0^t\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^t f(x)\,dx$（ $=I(t)$ とおく）

$0\leqq t\leqq\frac{3}{2}$ のとき，$I(t)=\int_0^t(1-x)\,dx$

$$\begin{aligned}&=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^t\\&=t-\frac{1}{2}t^2\\&=-\frac{1}{2}t(t-2)\\&\geqq 0\quad\left(\because\ 0\leqq t\leqq\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

$t\geqq\frac{3}{2}$ のとき，$I(t)=\int_0^{\frac{3}{2}}(1-x)\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^t(x-2)\,dx$

$$\begin{aligned}&=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{\frac{3}{2}}^t\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{9}{4}\right)-2\left(t-\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{9}{4}\\&=\frac{1}{2}(t-2)^2+\frac{7}{4}\\&>0\end{aligned}$$

よって，$t\geqq 0$ なる任意の t に対して $I(t)\geqq 0$，すなわち

$$\int_0^t\{f(x)-g(x)\}\,dx\geqq 0$$

が成り立っている。

つまり，$\int_0^t f(x)\,dx\geqq\int_0^t g(x)\,dx$ が $t\geqq 0$ で常に成立している。

しかし，(図 1) より $x\geqq 0$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ ではない。

(6)　×　【反例】$f(x)=2x+1$，$g(x)=x$

$f'(x)=2$，$g'(x)=1$ であり，任意の x に対して $f'(x)\geqq g'(x)$ ではあるが，任意の x に対して常に $f(x)\geqq g(x)$ ではない。

【総括】

○ならば□

の ○ という条件を噛み砕く力が求められます。

○を噛み砕いて翻訳し，○と□のギャップを少しでも縮める事が必要です。

全体的に定積分が「符号付き面積」であることから面積的なイメージがモノを言いました。

この分野において使っていいこと，いけないことをしっかりと整理しておかないと，この問題以外の様々な部分で影響してきます。

・「それらしい主張」に惑わされないこと
・勝手な My Rule をふりかざさないこと

という教訓にしてほしい問題です。