数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_n a_{n+2}-{a_{n+1}}^2=(-1)^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定まる。

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $m$ を自然数とするとき，$a_{6m}$ は８の倍数であることを示せ。

＜ '01 横浜国立大 ＞

**【戦略 1】**

(1) $a_n a_{n+2}-{a_{n+1}}^2=(-1)^{n+1}$ **という漸化式があるため，数学的帰納法で証明することを目論みます。**

$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$ **と仮定したとき** $a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}$ **も成り立つことを目指すことになるわけです。**

**手元にある漸化式は使ってよいため，** $\begin{cases} a_k a_{k+2}-{a_{k+1}}^2=(-1)^{k+1} \\ a_{k+1}a_{k+3}-{a_{k+2}}^2=(-1)^{k+2} \end{cases}$

**として，** $a_{k+3}$ **を登場させます。**

**右辺が符号違いなので，辺々加えたくなるでしょう。**
**辺々加えると**

$$a_k a_{k+2}-{a_{k+1}}^2+a_{k+1}a_{k+3}-{a_{k+2}}^2=0$$

**を得るわけですが，目標は** $a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}$ **であり，**$a_k$ **の番号を上げることを考えると，**$a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$ **としてぶち込みたくなると思います。**

**これにより，**$a_{k+1}(a_{k+3}-a_{k+2}-a_{k+1})=0$ **を得ることになります。**

**心の中では** $a_{k+1}>0$ **なのですが，「前の２項を足して次」ということは示すべきことであり，使用していいものではありません。**

**そこで，帰納法の構造を「人生帰納法」(全て仮定して次を示す)というスタイルで行くことにします。**

**つまり，**
$a_3=a_2+a_1,\ a_4=a_3+a_2,\ a_5=a_4+a_3,\ \cdots,\ a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$
**と仮定して，**$a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}$ **を示す。**

**というスタイルにするということです。**

**これによって，**$a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_{k+1},\ a_{k+2}$ **は全て正の数となりますから解決します。**

(2) $m$ **についての数学的帰納法で証明すれば** OK **です。**

$a_{6k}$ **が８の倍数と仮定したとき，**$a_{6k+6}$ **も８の倍数であることを示すわけです。**

**仮定を用いるために，**(1) **で得た漸化式を用いてどんどん番号を下げていくだけですが，集中力が必要です。**

【解 1】

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $\cdots(*)$ が成り立つことを $n$ についての数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$a_1a_3-{a_2}^2=1$ だから，$a_3=\dfrac{1+{a_2}^2}{a_1}=2=a_2+a_1$

よって，$(*)$ は $n=1$ のとき正しい。

[2] $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ のとき

$a_3=a_2+a_1,\ a_4=a_3+a_2,\ a_5=a_4+a_3,\ \cdots,\ a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$
が成り立つと仮定する。

このとき，$\begin{cases} a_k a_{k+2}-{a_{k+1}}^2=(-1)^{k+1} \\ a_{k+1}a_{k+3}-{a_{k+2}}^2=(-1)^{k+2} \end{cases}$

辺々加えると，$a_k a_{k+2}-{a_{k+1}}^2+a_{k+1}a_{k+3}-{a_{k+2}}^2=0$

ここで，帰納法の仮定から，$a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$

よって，$(a_{k+2}-a_{k+1})a_{k+2}-{a_{k+1}}^2+a_{k+1}a_{k+3}-{a_{k+2}}^2=0$

${a_{k+2}}^2$ の項が消えることに注意すると，

$$a_{k+1}(a_{k+3}-a_{k+2}-a_{k+1})=0$$

と整理できる。

ここで，$a_1=a_2=1\ (>0)$，及び，帰納法の仮定から

$$a_3>0,\ a_4>0,\ \cdots\cdots,\ a_{k+1}>0$$

ゆえに，$a_{k+3}-a_{k+2}-a_{k+1}=0$，すなわち $a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}$
が成り立ち，$(*)$ は $n=k+1$ のときも正しい。

[1], [2] より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成立することが示された。

(2) (1) で得た漸化式を用いて数列 $\{a_n\}$ を書き出すと

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots\cdots$$

$a_{6m}$ が８の倍数 $\cdots$ (☆) であることを $m$ についての数学的帰納法で示す。

[1] $m=1$ のとき $a_6=8$ なので，(☆) は正しい。

[2] $m=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき
$a_{6k}=8L$ ($L$ は正の整数) と表せると仮定する。

$$\begin{aligned} a_{6(k+1)}&=a_{6k+5}+a_{6k+4} \\ &=(a_{6k+4}+a_{6k+3})+a_{6k+4} \\ &=2a_{6k+4}+a_{6k+3} \\ &=2(a_{6k+3}+a_{6k+2})+a_{6k+3} \\ &=3a_{6k+3}+2a_{6k+2} \\ &=3(a_{6k+2}+a_{6k+1})+2a_{6k+2} \\ &=5a_{6k+2}+3a_{6k+1} \\ &=5(a_{6k+1}+a_{6k})+3a_{6k+1} \\ &=8a_{6k+1}+5a_{6k} \\ &=8a_{6k+1}+5\cdot 8L \end{aligned}$$

ゆえに，$a_{6(k+1)}=8(a_{k+1}+5L)$ となり，$a_{k+1}$，$5L$ は整数であるから

$a_{6(k+1)}$ は8の倍数であり，(☆) は $m=k+1$ のときも正しい。

[1], [2] より，$m=1, 2, 3, \cdots$ に対して，$a_{6m}$ は8の倍数であることが示された。

**【戦略2】(1) について**

**帰納法は帰納法ですが，**

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \text{ かつ } a_n>0,\ a_{n+1}>0$$

**という2つを同時に示すことで，通常の前段仮定の帰納法で示すことができます。**

【解2】(1) について

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ かつ $a_n>0$，$a_{n+1}>0$ …(*) であることを $n$ についての数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1a_3-a_2{}^2=1$ だから，$a_3=\dfrac{1+a_2{}^2}{a_1}=2=a_2+a_1$

また，$a_1=1>0$，$a_2=1>0$

よって，(*) は $n=1$ のとき正しい。

[2] $n=k$ $(k=1, 2, \cdots)$ のとき

$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$ かつ $a_k>0$，$a_{k+1}>0$ と仮定する。

このとき，$\begin{cases} a_ka_{k+2}-a_{k+1}{}^2=(-1)^{k+1} \\ a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+2}{}^2=(-1)^{k+2} \end{cases}$

辺々加えると，$a_ka_{k+2}-a_{k+1}{}^2+a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+2}{}^2=0$

ここで，帰納法の仮定から，$a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$

よって，$(a_{k+2}-a_{k+1})a_{k+2}-a_{k+1}{}^2+a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+2}{}^2=0$

$a_{k+2}{}^2$ の項が消えることに注意すると，

$$a_{k+1}(a_{k+3}-a_{k+2}-a_{k+1})=0$$

と整理できる。

帰納法の仮定より，$a_{k+1}>0$ であり，$a_{k+3}-a_{k+2}-a_{k+1}=0$

すなわち $a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}$ が成り立つ。

また，帰納法の仮定から，$a_k>0$，$a_{k+1}>0$ なので
$a_{k+1}>0$，$a_{k+2}(=a_{k+1}+a_k)>0$

よって，$n=k+1$ のときも (*) は正しい。

以上 [1], [2] より，$n=1, 2, \cdots$ において $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成立する。

【総括】

$a_1=1$，$a_2=1$ であるとして

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \implies a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$$

ということは例題で示しました。

本問は

$$a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1} \implies a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

というように「逆も言える」ということを示したわけです。