$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定まる数列を $\{a_n\}$ とする。次に，新しい数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。このとき　正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$b_{n+1}+b_n=0$

(2)　$a_{n+2}a_n-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$

＜ '85 広島大 改 ＞

【戦略】

(1)　**b_n を与える $b_n=a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2$ という定義式に従って**

$$b_{n+1}+b_n=(a_{n+1}a_{n+3}-a_{n+2}{}^2)+(a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2)$$

と数列 $\{a_n\}$ の項を用いて表します。

ここからは $\{a_n\}$ 側の漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ の出番です。

$$\begin{aligned}b_{n+1}+b_n&=a_{n+1}a_{n+3}-a_{n+2}{}^2+a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2\\&=a_{n+2}(a_n-a_{n+2})+a_{n+1}(a_{n+3}-a_{n+1})\end{aligned}$$

と見てやると， $\begin{cases}a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\\a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}\end{cases}$ **という漸化式から**

$$\begin{cases}a_n-a_{n+2}=-a_{n+1}\\a_{n+3}-a_{n+1}=a_{n+2}\end{cases}$$

を得ますので，代入すれば解決します。

(2)　**(1) から，$b_{n+1}=-b_n$ なので，数列 $\{b_n\}$ は公比 -1 の等比数列です。**

初項は $b_1=a_1a_3-a_2{}^2=1\cdot2-1^2=1$ ですから，

$$\begin{aligned}b_n&=(-1)^{n-1}\\&=(-1)^{n-1}\cdot1\\&=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^2\\&=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

ですから，$a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$ と所望の関係式が得られます。

【解答】

(1)　$$\begin{aligned}b_{n+1}+b_n&=(a_{n+1}a_{n+3}-a_{n+2}{}^2)+(a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2)\\&=a_{n+2}(a_n-a_{n+2})+a_{n+1}(a_{n+3}-a_{n+1})\end{aligned}$$

ここで，$\begin{cases}a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\\a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}\end{cases}$ より，

$$\begin{cases}a_n-a_{n+2}=-a_{n+1}&\cdots①\\a_{n+3}-a_{n+1}=a_{n+2}&\cdots②\end{cases}$$

①，② より，

$$\begin{aligned}b_{n+1}+b_n&=a_{n+2}\cdot(-a_{n+1})+a_{n+1}\cdot a_{n+2}\\&=0\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2)　(1) より，$b_{n+1}=-b_n$

$b_1=a_1a_3-a_2{}^2=1\cdot2-1^2=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 -1 の等比数列である。

ゆえに，$b_n=(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^2=(-1)^{n+1}$

これより，$a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$ が成り立つことが示された。

【総括】

例えば初項 1，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots$$

において，$b_n=a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2$ で定まる数列 $\{b_n\}$ を考えてみると

$$b_1=1\cdot4-2^2=0$$
$$b_2=2\cdot8-4^2=0$$
$$b_3=4\cdot16-8^2=0$$
$$b_4=8\cdot32-16^2=0$$

というように，$b_n=0$ となります。(等比中項の関係式)

これをフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ でやってみます。

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

において $b_n=a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2$ で定まる数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1=1\cdot2-1^2=1$$
$$b_2=1\cdot3-2^2=-1$$
$$b_3=2\cdot5-3^2=1$$
$$b_4=3\cdot8-5^2=-1$$
$$b_5=5\cdot13-8^2=1$$
$$b_6=8\cdot21-13^2=-1$$

と，1，-1 を繰り返します。

本問はその証明となっており，今回得た，$a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$ をカッシーニ・シムソンの定理と言います。

なお，今回は $b_n=a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2$ と置きなおして，数列 $\{b_n\}$ が公比 -1 の等比数列となっていることを経由しましたが，直接的に $a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$ であることを示すこともできます。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \implies a_{n+2}a_n-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1} \quad \cdots(*)$$

であることを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき　　$a_1=a_2=1$ であるから，$a_3=2$

$a_3a_1-a_2{}^2=2\cdot1-1^2=(-1)^2$ であり，$(*)$ は成立する。

[2]　$n=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$a_ka_{k+2}-a_{k+1}{}^2=(-1)^{k+1}$ が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned}a_{k+3}a_{k+1}-a_{k+2}{}^2&=(a_{k+2}+a_{k+1})a_{k+1}-a_{k+2}{}^2\\&=a_{k+2}a_{k+1}+a_{k+1}{}^2-a_{k+2}{}^2\\&=a_{k+2}(a_{k+2}-a_k)+a_{k+1}{}^2-a_{k+2}{}^2\\&=-a_{k+2}a_k+a_{k+1}{}^2\\&=-(a_{k+2}a_k-a_{k+1}{}^2)\\&=-(-1)^{k+1}\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})\\&=(-1)^{k+2}\end{aligned}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

[1]，[2] より，$(*)$ が示された。