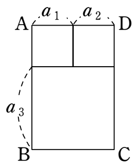
数列 $\{a_n\}$ は

$a_1=1$，$a_2=1$ $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ $(n=3,\ 4,\ \cdots)$

を満たすものとする。

また，図形 ABCD は $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$ の面積をもつ長方形である。



このとき，次の問いに答えよ。

(1) この長方形 ABCD に順次正方形を加えていくことにより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k{}^2$ の面積をもつ長方形を作図せよ。

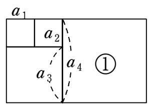
(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k{}^2=a_\alpha a_\beta$ となるような α，β $(\alpha<\beta)$ は何か。

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2=a_\alpha a_\beta$ となるような α，β $(\alpha<\beta)$ を与え，この等式が成立することを証明せよ。

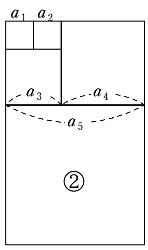
＜ ’85 三重大 改 ＞

【戦略】

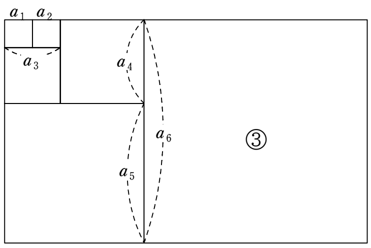
(1) **$a_2+a_3=a_4$ より ① という正方形を加えると，面積は $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2$ となります。**



次に $a_3+a_4=a_5$ であることから ② という正方形を加えると面積は $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2$ となります。



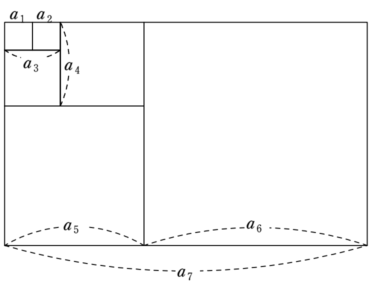
最後に $a_4+a_5=a_6$ であることから③ という正方形を加えると面積は $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2$ となり，これが求める長方形ということになります。



(2) **$a_5+a_6=a_7$ より この長方形の**

$\begin{cases}\text{横の長さは } a_7\\ \text{縦の長さは } a_6\end{cases}$

となり，面積は a_6a_7 ということになります。



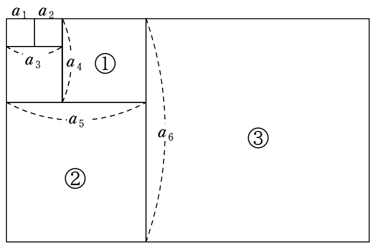
つまり，$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2=a_6a_7$ ということが言えるわけで，前半の問いは解決します。

後半の一般論も，$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=a_na_{n+1}$ と推測できます。

この証明は例題同様に数学的帰納法で捌けばよいでしょう。

【解答】

(1)



(図 1)

$a_2+a_3=a_4$ より，① の正方形を加える。

次に，$a_3+a_4=a_5$ より，② の正方形を加える。

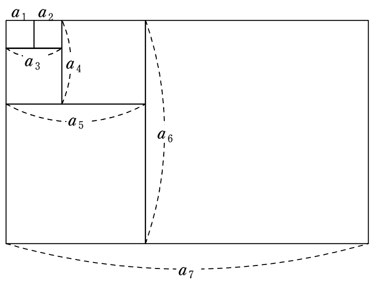
さらに，$a_4+a_5=a_6$ より，③ の正方形を加える。

これによってできる (図 1) の長方形の面積は

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2$$

となり，題意の長方形となる。

(2) $a_5+a_6=a_7$ より，(図 1) の長方形は (図 2) のような長さをもつ。



(図 2)

よって，この長方形の面積は a_6a_7 である。

(1) より，この長方形の面積は $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2$ であったため

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2=a_6a_7$$

が成り立つ。

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k{}^2=a_\alpha a_\beta$ が成り立つような α，β $(\alpha<\beta)$ は

$(\alpha,\ \beta)=(6,\ 7)$ …【答】

また，一般に $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2=a_\alpha a_\beta$ となる α，β $(\alpha<\beta)$ は

$$(\alpha,\ \beta)=(n,\ n+1)$$

と推測される。

つまり，

$$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=a_na_{n+1}\ \cdots(*)$$

が $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して成り立つと推測され，これを n についての数学的帰納法を用いて示す。

[1]　$n=1$ のとき

$$a_1{}^2=1^2=1$$
$$a_1a_2=1\cdot1=1$$

よって，$a_1{}^2=a_1a_2$ が成り立ち，(*) は $n=1$ のときに成立する。

[2]　$n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき
$$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_k{}^2=a_ka_{k+1}$$
が成立すると仮定する。

このとき，仮定した等式の両辺に $a_{k+1}{}^2$ を加えると

$$\begin{aligned}a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_k{}^2+a_{k+1}{}^2&=a_ka_{k+1}+a_{k+1}{}^2\\&=a_{k+1}(a_k+a_{k+1})\\&=a_{k+1}a_{k+2}\ (\because\ a_k+a_{k+1}=a_{k+2})\end{aligned}$$

となり，(*) は $n=k+1$ のときも成立する。

[1], [2] より，$n=2, 3, 4, \cdots$ に対して
$$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=a_na_{n+1}$$
が成立することが示された。

【総括】

例題のフィボナッチ数列の平方和に関する
$$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=a_na_{n+1}$$
という等式を視覚化することで直感的に納得しやすくなっています。