$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して数列 $\{F_n\}$，$\{L_n\}$ を

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$
$$L_1=1,\ L_2=3,\ L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$$

で定まる数列とする。

(1) $F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ であることを証明せよ。

(2) $F_nL_n=F_{2n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ であることを証明せよ。

＜有名事実＞

**【戦略】**

(1) **数学的帰納法で示すことになります。**

**$n=k$ のときの成立を仮定し，$n=k+1$ のときの成立，すなわち**

$$F_k+F_{k+2}=L_{k+1}$$

**を目指す部分が大枠ですが，**

$$\begin{aligned}F_k+F_{k+2}&=F_k+F_{k+1}+F_k\\&=F_{k-2}+F_{k-1}+F_{k+1}+F_k\\&=L_{k-1}+L_k\\&=L_{k+1}\end{aligned}$$

**と変形していけばよいわけです。**

**ただし，途中 $F_{k-2}$ という項が現れ，添え字的に $k\geqq 3$ である必要があると気がつくと思います。**

**なので，$n=2$ のときだけでなく，$n=3$ のときについても個別で検証しておく必要があります。**

(2) **フィボナッチ数列 $\{F_n\}$，リュカ数列 $\{L_n\}$ の一般項は**

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ **として，**

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),\ L_n=\alpha^n+\beta^n$$

**で与えられます。**

**$F_nL_n$ と積を考えると，和と差の積の形であるため**

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})$$

**となり，即解決です。**

【解答】

(1) $F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ $\cdots(*)$ であることを $n$ についての数学的帰納法で証明する。

[1] $n=2$ のとき，$\begin{cases}F_1+F_3=1+2=3\\L_2=3\end{cases}$

よって，$F_1+F_3=L_2$ であり，$(*)$ は正しい。

[2] $n=3$ のとき，$\begin{cases}F_2+F_4=1+3=4\\L_3=4\end{cases}$

よって，$F_2+F_4=L_3$ であり，$(*)$ は正しい。

[3] $n=k$ $(k=3,\ 4,\ \cdots)$ のとき，$\begin{cases}F_{k-1}+F_{k+1}=L_k\\F_{k-2}+F_k=L_{k-1}\end{cases}$ と仮定する。

$$\begin{aligned}F_k+F_{k+2}&=F_k+F_{k+1}+F_k\\&=F_{k-2}+F_{k-1}+F_{k+1}+F_k\\&=L_{k-1}+L_k\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})\\&=L_{k+1}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

[1]，[2]，[3] から，$F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つ。

(2) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ として，

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),\ L_n=\alpha^n+\beta^n$$

であるから，

$$\begin{aligned}F_nL_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^n+\beta^n)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})\\&=F_{2n}\end{aligned}$$

【総括】

フィボナッチ数列とリュカ数列の有名な相互関係です。

例題では連立漸化式としての絡みを見ていきましたが，本問では直接的な関係を見てみました。

(2) では一般項の導出を少々サボりました。

きちんと導出する部分については第１講，第２講を参照して下さい。