$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とし，$\alpha^n=\dfrac{p_n+q_n\sqrt{5}}{2}$ となるように有理数 p_n，q_n $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ 定める。($\sqrt{5}$ が無理数であることは認めてよい。)

(1) $p_{n+1}=\dfrac{p_n+5q_n}{2}$，$q_{n+1}=\dfrac{p_n+q_n}{2}$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) $p_{n+2}=p_{n+1}+p_n$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\beta^n=\dfrac{p_n-q_n\sqrt{5}}{2}$ となることを証明せよ。

(4) p_n を α と β を用いて表せ。

＜ '07 埼玉大 改 ＞

【戦略】

(1) **$\alpha^{n+1}=\alpha\cdot\alpha^n$ と見て，$\dfrac{p_{n+1}+q_{n+1}\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{p_n+q_n\sqrt{5}}{2}$ として左辺と右辺を比べていきます。**

a，b，c，d が有理数，u が無理数であるとき

$$a+bu=c+du \iff \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

という基本事項を用いていきます。

(2) **p_n 側のみの漸化式が欲しいわけですから，(1) で得た漸化式から q_n 側を消去することを考えるのが自然です。**

(3) **手元に漸化式があれば，当然数学的帰納法で示します。**

(4) $\begin{cases} \alpha^n=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{\sqrt{5}}{2}q_n \\ \beta^n=\dfrac{1}{2}p_n-\dfrac{\sqrt{5}}{2}q_n \end{cases}$ **という 2 式があるわけなので，p_n が欲しければ，辺々加えることで q_n を消せば，p_n を α，β で表せます。**

【解答】

(1) $\alpha^{n+1}=\alpha\cdot\alpha^n$ より，$\dfrac{p_{n+1}+q_{n+1}\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{p_n+q_n\sqrt{5}}{2}$

ゆえに，
$$\begin{aligned} p_{n+1}+q_{n+1}\sqrt{5} &= \frac{1}{2}\left\{(1+\sqrt{5})(p_n+q_n\sqrt{5})\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(p_n+5q_n)+(p_n+q_n)\sqrt{5}\right\} \\ &= \frac{p_n+5q_n}{2}+\frac{p_n+q_n}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

p_n，q_n，p_{n+1}，q_{n+1} は有理数であり，$\dfrac{p_n+5q_n}{2}$，$\dfrac{p_n+q_n}{2}$ も有理数である。

一方，$\sqrt{5}$ は無理数である。

ゆえに

$$p_{n+1}=\frac{p_n+5q_n}{2}，q_{n+1}=\frac{p_n+q_n}{2} \quad (n=1，2，3，\cdots\cdots)$$

が成り立つ。

(2) $\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{p_n+5q_n}{2} & \cdots① \\ q_{n+1}=\dfrac{p_n+q_n}{2} & \cdots② \end{cases}$ に対して，① より

$$q_n=\frac{1}{5}\left\{2p_{n+1}-p_n\right\}$$

これより，$q_{n+1}=\dfrac{1}{5}\left\{2p_{n+2}-p_{n+1}\right\}$

これらを ② に代入すると

$$\frac{1}{5}\left\{2p_{n+2}-p_{n+1}\right\}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left\{2p_{n+1}-p_n\right\}$$

$$\frac{2}{5}p_{n+2}-\frac{1}{5}p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{5}p_{n+1}-\frac{1}{10}p_n$$

これを整理すると，$p_{n+2}=p_{n+1}+p_n$ を得る。

(3) $\beta^n=\dfrac{p_n-q_n\sqrt{5}}{2}$ $\cdots(*)$ を n に関する数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり，$p_1=1$，$q_1=1$

一方，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ であり，$\beta=\dfrac{p_1-q_1\sqrt{5}}{2}$ と表せる。

ゆえに，$\beta^1=\dfrac{p_1-q_1\sqrt{5}}{2}$ であり，$(*)$ は正しい。

[2]　$n=k$ ($k=1, 2, \cdots$) のとき，$\beta^k=\dfrac{p_k-q_k\sqrt{5}}{2}$ と仮定する。

$$\beta^{k+1}=\beta\cdot\beta^k$$
$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{p_k-q_k\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$=\frac{p_k+5q_k}{2}-\frac{p_k+q_k}{2}\sqrt{5}$$
$$=p_{k+1}-q_{k+1}\sqrt{5}\quad (\because ①, ②)$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも (*) は正しい。

[1], [2] より，$n=1, 2, \cdots$ に対して $\beta^n=\dfrac{p_n-q_n\sqrt{5}}{2}$ と表せる。

(4) $$\begin{cases} \alpha^n=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{\sqrt{5}}{2}q_n \\ \beta^n=\dfrac{1}{2}p_n-\dfrac{\sqrt{5}}{2}q_n \end{cases}$$

辺々加えると，$p_n=\alpha^n+\beta^n$ …答

【総括】

問題自体は標準的な内容です。

今回の問題を振り返ってみると $\alpha^1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\alpha^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ なので

$$p_1=1,\ p_2=3,\ p_{n+2}=p_{n+1}+p_n$$

ということで，数列 $\{p_n\}$ はリュカ数列ということになります。

また，$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{p_n+5q_n}{2} & \cdots ① \\ q_{n+1}=\dfrac{p_n+q_n}{2} & \cdots ② \end{cases}$ から，p_n 側を消去して，q_n についての漸化式を作ってみます。

② より，$p_n=2q_{n+1}-q_n$ ですから，$p_{n+1}=2q_{n+2}-q_{n+1}$ であり，これを ① に代入すると

$$2q_{n+2}-q_{n+1}=\frac{1}{2}(2q_{n+1}-q_n)+\frac{5}{2}q_n$$

これを整理すると，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ を得ます。

$q_1=1$，$q_2=1$ であることから，数列 $\{q_n\}$ はフィボナッチ数列ということになるわけです。

このように，黄金数 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の n 乗，$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ を整理したときの係数 p_n，q_n がフィボナッチ数列，リュカ数列と繋がっていることになります。

この ①，② がフィボナッチ数列，リュカ数列をつなぐ相互関係的な連立漸化式ということになります。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

なお，元々，α は $x^2-x-1=0$ の解ですから，$\alpha^2-\alpha-1=0$
すなわち，$\alpha^2=\alpha+1$ を満たしており，両辺に α^n をかけることで
$$\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$$
を得ます。

これより，$\dfrac{p_{n+2}+q_{n+2}\sqrt{5}}{2}=\dfrac{p_{n+1}+q_{n+1}\sqrt{5}}{2}+\dfrac{p_n+q_n\sqrt{5}}{2}$

すなわち，$p_{n+2}+q_{n+2}\sqrt{5}=(p_{n+1}+p_n)+(q_{n+1}+q_n)\sqrt{5}$ ということになり

$$\begin{cases} p_{n+2}=p_{n+1}+p_n \\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n \end{cases}$$

という関係式を一気に得ることもできます。