数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義されている。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。

＜ '94 関西医科大学，'86 香川医科大学 ＞

【戦略】

(1) **隣接 3 項間漸化式の処理になります。**

$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ **という漸化式に対して特性方程式** $x^2-x-1=0$ **の 2 解** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **を用いて**

$$\begin{cases} a_{n+2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right) \\ a_{n+2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right) \end{cases}$$

と 2 通りに変形して，各々の等比数列の構造を捌いていきます。

(2) **(1) の結論** $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ **から**

$$\begin{aligned} S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k \\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\} \end{aligned}$$

ということになり，形はいかついですが，結局は等比数列の和ということになります。

目がチカチカするため，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ **などとおき**

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k-\beta^k)$$

と少しでも目に優しく処理していくことを考えていきましょう。

途中の式変形では $\alpha+\beta=1$ **ということをうまいこと活用しながら計算を進めていくとキレイにまとまります。**

(3) **結局** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}$ **で，**$\beta=0.**\cdots$ **なので，感覚的にはほとんど** α **に収束していきそうな気がしますが，記述上は**

より強きもので括る

という態度で

$$\frac{\alpha^{n+1}\left\{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right\}}{\alpha^n\left\{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right\}}$$

と見て捌けばよいでしょう。

【解答】

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ は

$$\begin{cases} a_{n+2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right) \cdots ① \\ a_{n+2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right) \cdots ② \end{cases}$$

と 2 通りに変形できる。

① より，
$$\begin{aligned} a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n&=\left(a_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots ③ \end{aligned}$$

② より，
$$\begin{aligned} a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n&=\left(a_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots ④ \end{aligned}$$

③－④ より $\sqrt{5}a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

よって，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ …答

(2) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

$$\begin{aligned} S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k-\beta^k) \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}-\frac{\beta(1-\beta^n)}{1-\beta}\right\} \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{\alpha}{\beta}(1-\alpha^n)-\frac{\beta}{\alpha}(1-\beta^n)\right\}\ (\because\ \alpha+\beta=1) \end{aligned}$$

ここで，
$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{-4}=-\alpha^2 \\ \dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{(1-\sqrt{5})^2}{-4}=-\beta^2 \end{cases}$$
より

$$\begin{aligned} S_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}\{-\alpha^2(1-\alpha^n)+\beta^2(1-\beta^n)\} \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}+(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)\} \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}-\sqrt{5}\}\ \left(\because\ \begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha-\beta=\sqrt{5}\end{cases}\right) \\ &=a_{n+2}-1 \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}-1 \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3) $a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ より

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+!})}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)}$$

$$=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}$$

$$=\frac{\alpha^{n+1}\left\{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right\}}{\alpha^n\left\{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right\}}$$

$$=\alpha\cdot\frac{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}$$

ここで，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ …答

【総括】

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられる数列をフィボナッチ数列と言い，この数列に現れる数をフィボナッチ数と言います。

（$\{a_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，……）

フィボナッチ数列は自然界にもよく現れ，植物の花びらの枚数などもフィボナッチ数になっています。（桜は 5 枚，コスモスは 8 枚，マーガレットは 21 枚など）

また，ヤナギの一種には茎の周りを 5 周する間に 13 枚の葉が付いています。一般に茎の周りを N 周する間に M 枚の葉が付いているとき，$N:M$ という比がフィボナッチ数の比になっていると，葉の重なりが少なくなり日光によく当たることも知られており，植物は合理的に葉をつけているということが言えます。

フィボナッチ数列は様々な性質があり，本問は

一般項の導出

第 n 項までの和

隣接 2 項の比

にスポットを当てました。

なお，それぞれについて補足を入れていきます。

ビネの公式

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

と，フィボナッチ数列の一般項の結果は「ビネの公式」と呼ばれます。

また，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比 φ であり，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は $-\dfrac{1}{\varphi}$ です。

さらに，隣接 2 項の比 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ の極限は黄金比 $\varphi\left(=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ に収束します。

フィボナッチ数列と黄金比の美しい絡みが見て取れると思います。

次に

フィボナッチ数列の和についての性質

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=a_{n+2}-1$$

という事が言えます。ガチンコの等比数列の和を計算せずとも和が出せるというのは中々オイシイ結果でしょう。

本問は愚直に証明しましたが，結果を知っていれば帰納法でも証明できます。（とは言え「皆が皆ご存じ」というわけではないため，入試的に無理に覚える必要はなく，高校で学習する基礎学力の範疇で導出できれば問題ありません。）