△ABCにおいて，辺 AB を $p:1-p$ に内分する点を P，辺 AC を $q:1-q$ に内分する点を Q とする。$(0<p<1,\ 0<q<1)$

(1) 線分 PQ が △ABCの重心 G を通るとき，p，q の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) (1) の条件のもとで，面積比 $r=\dfrac{\triangle \mathrm{APQ}}{\triangle \mathrm{ABC}}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

＜ ’84 東京電機大 ＞

【戦略】

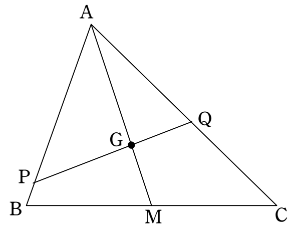
G が重心ということで，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と，位置が決まっています。

(1) **例題同様，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の形で表し，$s+t=1$ とします。**

(2) **面積比の計算も例題同様に捌きます。**

今回は最小値ではなく，「とり得る値の範囲」なので相加・相乗平均の関係は使えないため，文字消去からの微分法で処理していきます。

【解 1】



(1) △ABCの重心が G なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

さらに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}&=\frac{1}{3p}\left(p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\frac{1}{3q}\left(q\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\frac{1}{3p}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{3q}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\end{aligned}$$

G が線分 PQ 上なので，$\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3q}=1$

これより，$p+q=3pq$ …答

(2) $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{\triangle \mathrm{APQ}}{\triangle \mathrm{ABC}}&=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sin\theta}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta}\\&=\frac{p|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cdot q|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\\&=pq\end{aligned}$$

(1) の等式において $p=\dfrac{1}{3}$ とすると，$\dfrac{1}{3}+q=q$ となり不合理。

ゆえに，$p\neq\dfrac{1}{3}$ で，$q=\dfrac{p}{3p-1}$

$0<q<1$ より，$0<\dfrac{p}{3p-1}<1$

左側の不等式，及び $p>0$ から $3p-1>0$，すなわち $p>\dfrac{1}{3}$

このとき，右側の不等式から $p<3p-1$，すなわち $p>\dfrac{1}{2}$

以上から，$\dfrac{1}{2}<p<1$

このとき

$$\begin{aligned}r&=pq\\&=\frac{p^2}{3p-1}\\&=\frac{1}{3}p+\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{9}}{3p-1}\\&=\frac{1}{9}\left(3p+\frac{1}{3p-1}+1\right)\end{aligned}$$

$f(p)=3p+\dfrac{1}{3p-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(p)&=3-\frac{3}{(3p-1)^2} \\ &=3\cdot\frac{3p(3p-2)}{(3p-1)^2} \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}<p<1$ の範囲では

p	$\left(\dfrac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$	$\left(\dfrac{7}{2}\right)$	↘	3	↗	$\left(\dfrac{7}{2}\right)$

$r=\dfrac{1}{9}\{f(p)+1\}$ より，$\dfrac{1}{9}(3+1)\leqq r<\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{7}{2}+1\right)$

よって，$\dfrac{4}{9}\leqq r<\dfrac{1}{2}$ …答

【総括】

単純に $0<p<1$ という範囲で微分に走ると，処理は大変だわ誤りだわでWパンチです。